



TESIS - SM 142501

ANALISIS SISTEM DINAMIK MODEL PENYEBARAN PENYAKIT MENULAR ANTAR DUA WILAYAH DAN KONTROL OPTIMAL PADA POPULASI *INFECTED*

EKO ALAN KUSUMAYADI S.P.L
NRP 1213 201 204

DOSEN PEMBIMBING
Dr. Hariyanto, M.Si.
Dr. Dra. Mardlijah, M.T.

PROGRAM MAGISTER
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
INSTITUT TEKNOLOGI SEPULUH NOPEMBER
SURABAYA
2015



THESIS - SM 142501

DYNAMIC SYSTEM ANALYSIS OF INFECTION DISEASE SPREADING MODEL BETWEEN TWO REGIONS AND OPTIMAL CONTROL OF INFECTED POPULATION

EKO ALAN KUSUMAYADI S.P.L
NRP 1213 201 204

SUPERVISOR
Dr. Hariyanto, M.Si.
Dr. Dra. Mardlijah, M.T.

MAGISTER DEGREE
MATHEMATICS DEPARTMENT
FACULTY OF MATHEMATICS AND NATURAL SCIENCES
INSTITUT TEKNOLOGI SEPULUH NOPEMBER
SURABAYA
2015

**ANALISIS SISTEM DINAMIK MODEL PENYEBARAN PENYAKIT
MENULAR ANTAR DUA WILAYAH DAN KONTROL OPTIMAL PADA
POPULASI *INFECTED***

Tesis ini disusun untuk memenuhi salah satu syarat memperoleh gelar
Magister Sains (M.Si.)
di

Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya

Oleh :

EKO ALAN KUSUMAYADI S.P.L
NRP. 1213 2012 04

Tanggal Ujian : 8 Juli 2015

Periode Wisuda : September 2015

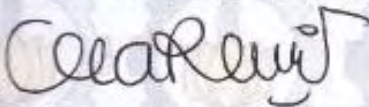
Disetujui oleh :



Dr. Hariyanto, M.Si.

NIP. 19530414 198203 1 002

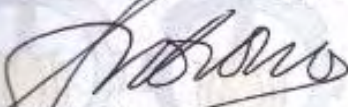
(Pembimbing I)



Dr. Dra. Mardlijah, M.T.

NIP. 19670114 199102 2 001

(Pembimbing II)



Dr. Subiono, M.S.

NIP. 19570411 198403 1 001

(Penguji)



Dr. Dwi Ratna S., S.Si, M.T.

NIP. 19690405 199403 2 003

(Penguji)



Direktur Program Pascasarjana

Prof. Dr. Ir. Adi Soeprijanto, M.T.

NIP. 19640405 199002 1 001

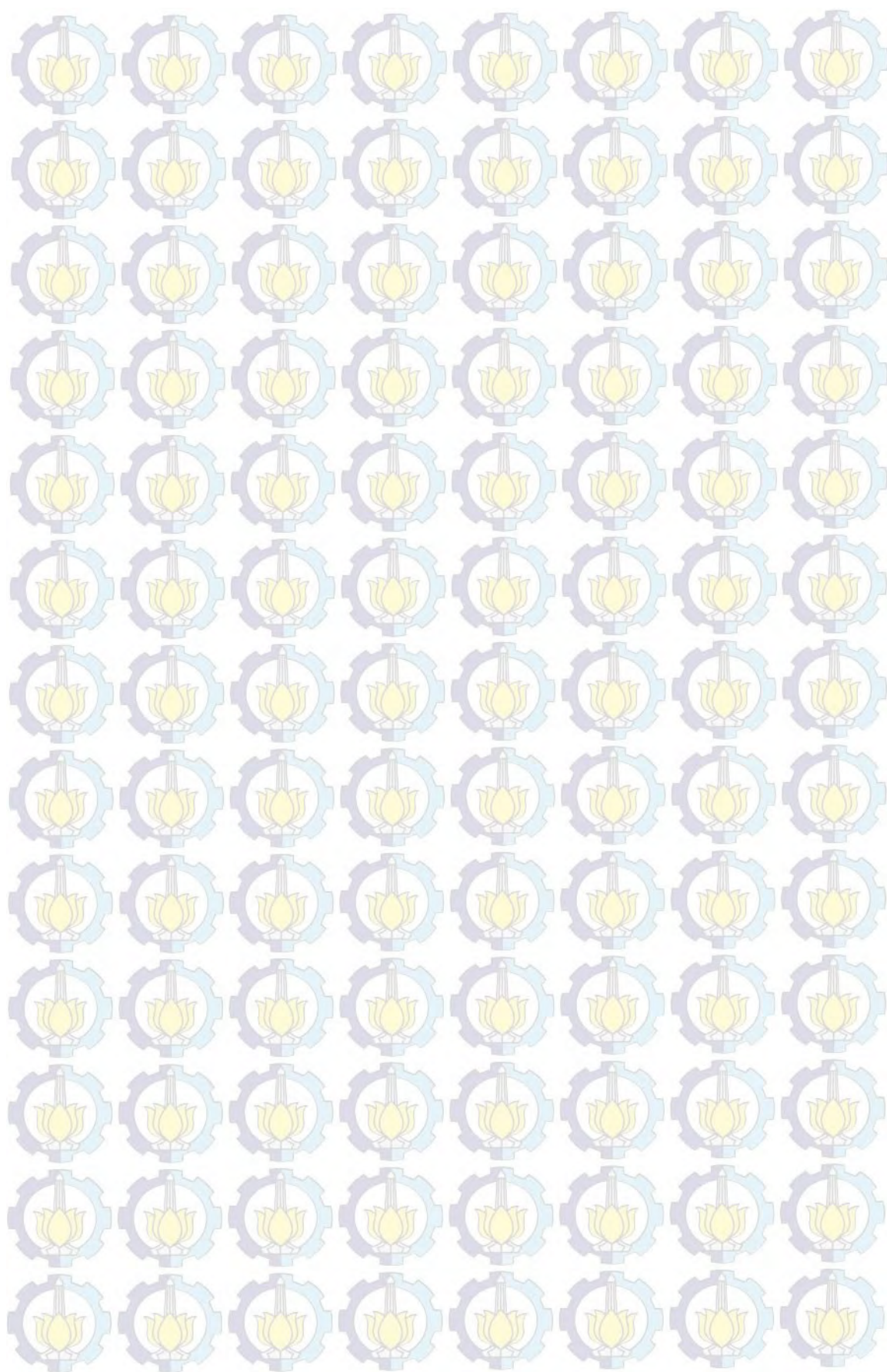
ANALISIS SISTEM DINAMIK MODEL PENYEBARAN PENYAKIT MENULAR ANTAR DUA WILAYAH DAN KONTROL OPTIMAL PADA POPULASI *INFECTED*

Nama Mahasiswa : Eko Alan Kusumayadi S.P.L
NRP : 1213 2012 04
Pembimbing : 1. Dr. Hariyanto, M.Si.
2. Dr. Dra. Mardlijah, M.T.

ABSTRAK

Berkembangnya pembangunan ekonomi, komunikasi lintas budaya, dan mudahnya akses transportasi menjadikan wilayah satu dengan wilayah lainnya terasa lebih dekat. Kondisi ini menyebabkan banyak orang sering bepergian dari wilayah satu ke wilayah lainnya, sehingga perjalanan penduduk antarwilayah dapat menyebabkan penularan penyakit karena memungkinkan individu yang terinfeksi untuk menularkan penyakitnya kepada individu sehat pada saat perjalanan antarwilayah. Pada penelitian ini dikonstruksi model matematika tipe *SIRS* untuk menggambarkan penyebaran penyakit menular antar dua wilayah dalam dua kasus. Model I dikonstruksi dengan adanya individu yang bepergian antar dua wilayah dan model II dikonstruksi dengan adanya individu yang bepergian antar dua wilayah dan adanya kontrol pengobatan pada populasi *infected*, sehingga menghasilkan populasi baru yaitu populasi *treatment* yang didalamnya terdapat individu dalam masa pengobatan dan model II menjadi model matematika tipe *SITRS* (*Susceptible Infected Treatment Removed Susceptible*). Kedua model memiliki dua titik kesetimbangan yaitu bebas penyakit dan endemi. Ketika bilangan reproduksi dasar kurang dari satu maka ada satu titik kesetimbangan yang eksis, yaitu bebas penyakit yang bersifat stabil asimtotik dan ketika bilangan reproduksi dasar lebih dari satu maka ada dua titik kesetimbangan yang eksis, yaitu endemi yang bersifat stabil asimtotik dan bebas penyakit yang bersifat tidak stabil. Kemudian diketahui besarnya pengaruh perpindahan individu antarwilayah terhadap dinamika penyebaran penyakit dan kontrol optimal pengobatan yang dilakukan pada populasi *infected*.

Kata kunci : bilangan reproduksi dasar, kontrol optimal, model penyebaran penyakit dua wilayah.



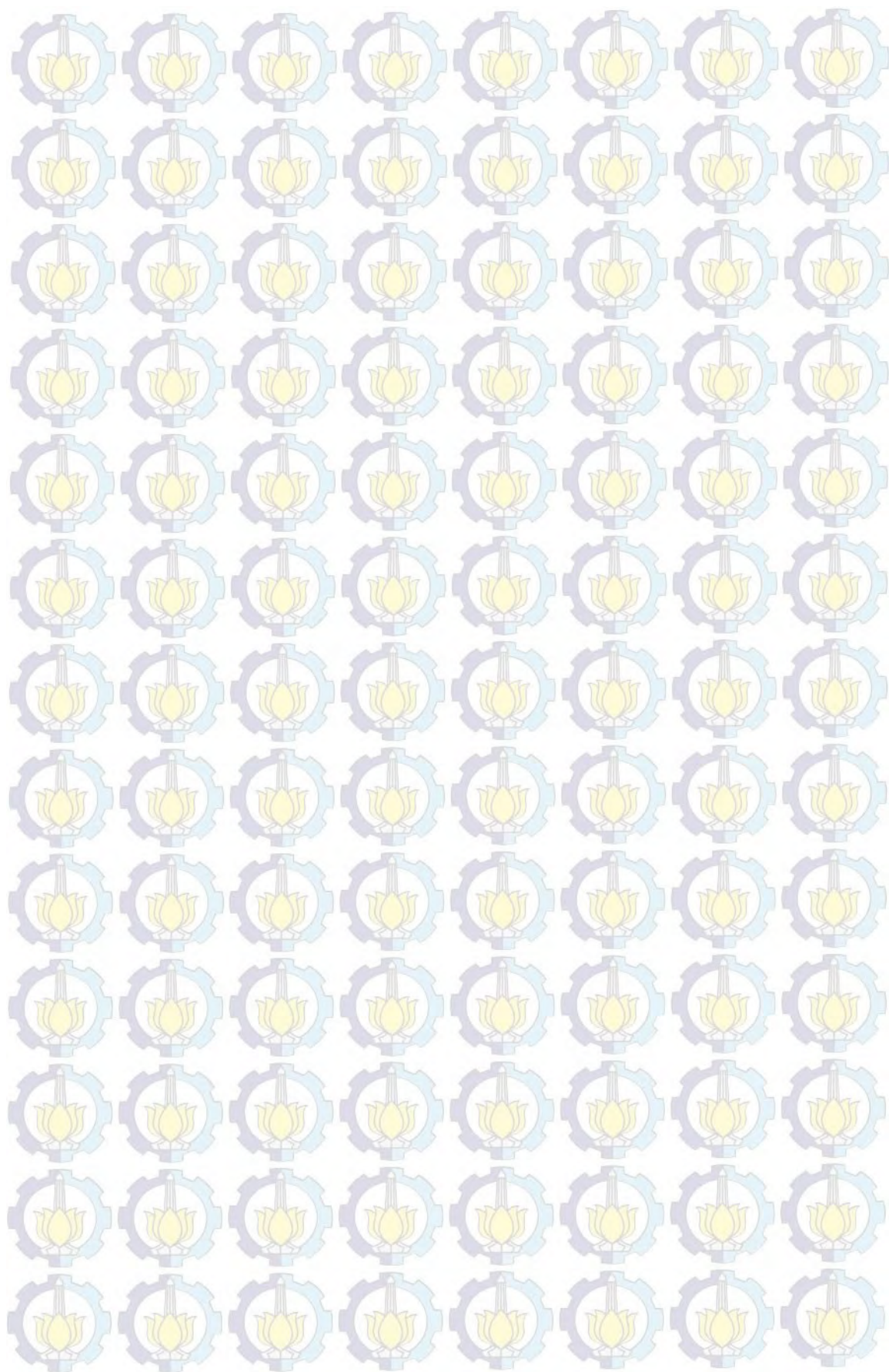
DYNAMIC SYSTEM ANALYSIS OF INFECTION DISEASE SPREADING MODEL BETWEEN TWO REGIONS AND OPTIMAL CONTROL OF INFECTED POPULATION

Name : Eko Alan Kusumayadi S.P.L
Student Identity Number : 1213 2012 04
Supervisor : 1. Dr. Hariyanto, M.Si.
2. Dr. Dra. Mardlijah, M.T.

ABSTRACT

The rise of economic development, communication cross culture, and easily transportation access makes one region and another becomes much closer. This condition makes many people often move to another region, so their movement makes infection because infected individual spreads his disease to susceptible individual when he move to another region. In this research the mathematics model is constructed as SIRS model to describe infection disease spreading between two regions in two cases. Model I is constructed by presence of moving individual between two regions and model II is constructed by presence of moving individual between two regions with treatment control in infected population, so produces a new population, the treatment population, where there are individuals in treatment phase and model II becomes mathematics model type SITRS (Susceptible Infected Treatment Removed Susceptible). Both models having two equilibrium point that is free disease and endemic. When basic reproduction number less than one then there will be one equilibrium point exist, that is free disease that have asymptotic stable characteristic and when basic reproduction number more than one then there will be two equilibrium point exist, that are endemic that have asymptotic stable characteristic and free disease that have unstable characteristic. Then there will be known how many influences individual movement between two regions in disease spreading and optimal control treatment the given to the infected population.

Keywords : basic reproduction number, optimal control, epidemic models in two regions.



KATA PENGANTAR

Puji syukur Alhamdulillah penulis panjatkan kehadirat Allah SWT yang telah melimpahkan Rahmat, Taufiq, dan Hidayah-Nya, serta junjungan Beliau Rasulullah SAW atas suri teladan yang dibawanya sehingga penulis dapat menyelesaikan Tesis yang berjudul **“Analisis Sistem Dinamik Model Penyebaran Penyakit Menular Antar Dua Wilayah dan Kontrol Optimal Pada Populasi *Infected*”** ini tepat pada waktunya. Tesis ini merupakan sebagian persyaratan kelulusan dalam memperoleh gelar magister di Program Studi Magister Matematika, Fakultas MIPA, Institut Teknologi Sepuluh Nopember.

Penyusunan Tesis ini tidak lepas dari bimbingan, bantuan, dan dukungan moral maupun spiritual dari banyak pihak. Oleh sebab itu, penulis mengucapkan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada:

1. Bapak, Ibu, beserta keluarga tercinta yang selalu memberikan dukungan, doa, dan motivasi agar penulis dapat menyelesaikan Tesis ini.
2. Prof. Dr. Erna Apriliani, M.Si., selaku Ketua Jurusan Matematika Institut Teknologi Sepuluh Nopember.
3. Dr. Hariyanto, M.Si. dan Dr. Dra.Mardijah, M.T. selaku dosen pembimbing yang telah meluangkan waktu untuk membimbing, memberikan masukan dan mendorong penulis dalam menyelesaikan Tesis ini.
4. Dr. Subiono, M.S. selaku dosen wali yang telah memberikan motivasi, arahan, dan bimbingan selama penulis menempuh kuliah.
5. Dr. Subiono, M.S. dan Dr. Dwi Ratna S., S.Si, M.T. selaku dosen penguji yang telah memberikan masukan dan juga motivasi bagi penulis sehingga Tesis ini dapat diselesaikan tepat waktu.
6. Seluruh dosen Matematika yang telah memberikan bekal dan ilmu pengetahuan serta staf administrasi Program Studi Magister Matematika atas segala bantuannya.
7. Vylde Pavela dan sahabat penulis lainnya atas semua bantuan, semangat, dan dukungannya selama proses penulisan Tesis ini.

8. Keluarga besar Pascasarjana Matematika ITS 2013, dan semua pihak yang telah membantu proses penulisan Tesis ini yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu. Terima kasih.

Semoga Allah SWT memberikan anugerah dan karunia-Nya kepada semua pihak yang telah membantu menyelesaikan Tesis ini.

Penulis menyadari bahwa dalam penulisan Tesis ini masih banyak kekurangan, sehingga kritik dan saran dari pembaca sangat penulis harapkan untuk perbaikan kedepannya. Kritik dan saran bisa dikirim melalui email penulis ekoalan1605@gmail.com. Akhirnya semoga Tesis ini dapat bermanfaat bagi pembaca, khususnya mahasiswa Institut Teknologi Sepuluh Nopember.

Surabaya, 17 Juni 2015

Penulis

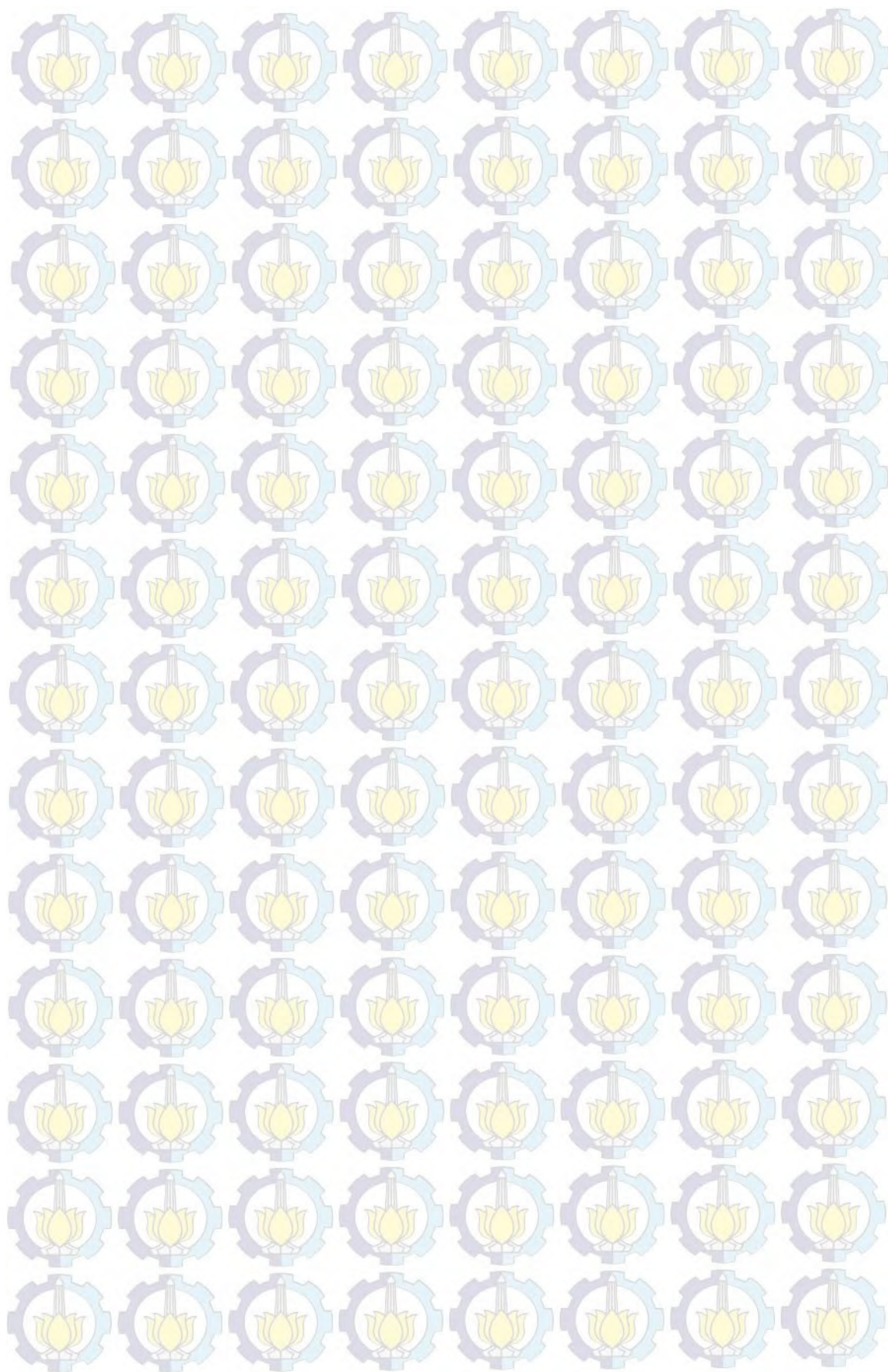
DAFTAR ISI

LEMBAR PENGESAHAN	i
ABSTRAK	iii
ABSTRACT	v
KATA PENGANTAR.....	vii
DAFTAR ISI.....	ix
DAFTAR TABEL	xi
DAFTAR GAMBAR.....	xiii
DAFTAR LAMPIRAN	xv
BAB 1 PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	3
1.3 Batasan Masalah.....	3
1.4 Tujuan Penelitian	4
1.5 Manfaat Penelitian	4
BAB 2 KAJIAN PUSTAKA DAN DASAR TEORI	5
2.1 Model Penyebaran Penyakit Antarwilayah.....	5
2.1.1 Fenomena Penyakit TBC.....	6
2.1.2 Fenomena Penyakit Influenza	7
2.2 Sistem Dinamik.....	8
2.3 Titik Keseimbangan	9
2.4 Kestabilan Lokal Pada Titik Keseimbangan.....	9
2.5 Kriteria Routh-Hurwitz	13
2.6 Bilangan Reproduksi Dasar	14
2.7 Teori Kontrol Optimal.....	16
2.8 Prinsip Maksimum Pontryagin.....	17
BAB 3 METODE PENELITIAN	19
BAB 4 HASIL DAN PEMBAHASAN.....	21
4.1 Model I.....	21
4.1.1 Konstruksi Model I.....	21
4.1.2 Titik Keseimbangan pada Model I	26
4.1.3 Kestabilan Titik Keseimbangan pada Model I	33
4.2 Model II.....	40

4.2.1	Konstruksi Model II	40
4.2.2	Titik Keseimbangan pada Model II	44
4.2.3	Kestabilan Titik Keseimbangan pada Model II	52
4.2.4	Kontrol Optimal	60
4.3	Simulasi Numerik	66
4.3.1	Simulasi Numerik Ketika $\mathcal{R}_0 < 1$	67
4.3.2	Simulasi Numerik Ketika $\mathcal{R}_0 > 1$	68
4.3.3	Eksistensi Titik keseimbangan	72
4.3.4	Pengaruh Perpindahan Individu Antarwilayah	73
BAB 5	KESIMPULAN DAN SARAN	75
5.1	Kesimpulan	75
5.2	Saran	77
	DAFTAR PUSTAKA	79
	LAMPIRAN	81
	BIODATA PENULIS	91

DAFTAR GAMBAR

Gambar 4.1 Diagram kompartemen model I.....	25
Gambar 4.2 Diagram kompartemen model II	43
Gambar 4.3 Perubahan banyaknya individu pada model I untuk $\mathcal{R}_0 < 1$	67
Gambar 4.4 Perbandingan perubahan banyaknya individu susceptible tanpa dan dengan kontrol.....	69
Gambar 4.5 Perbandingan perubahan banyaknya individu infected tanpa dan dengan kontrol.....	69
Gambar 4.6 Perbandingan perubahan banyaknya individu treatment tanpa dan dengan kontrol.....	70
Gambar 4.7 Perbandingan perubahan banyaknya individu removed tanpa dan dengan kontrol.....	71
Gambar 4.8 Kontrol pengobatan.....	72
Gambar 4.9 Eksistensi Titik Keseimbangan.....	73
Gambar 4.10 Pengaruh perpindahan individu antarwilayah terhadap populasi....	74
Gambar 4.11 Pengaruh perpindahan individu antarwilayah terhadap \mathcal{R}_0	74

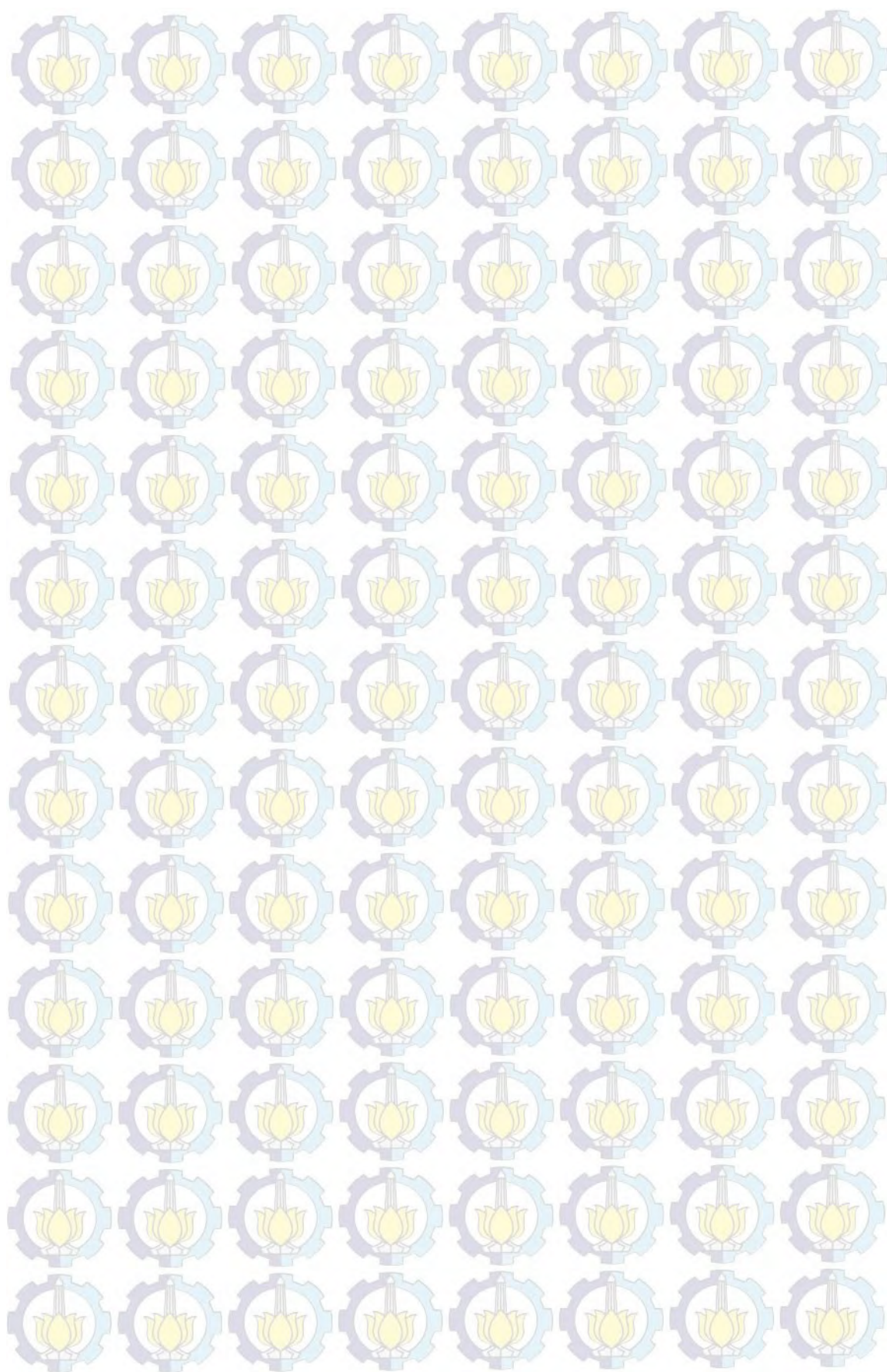




DAFTAR TABEL

Tabel 2.1 Kriteria kestabilan titik kesetimbangan sistem autonomous nonlinear. 12

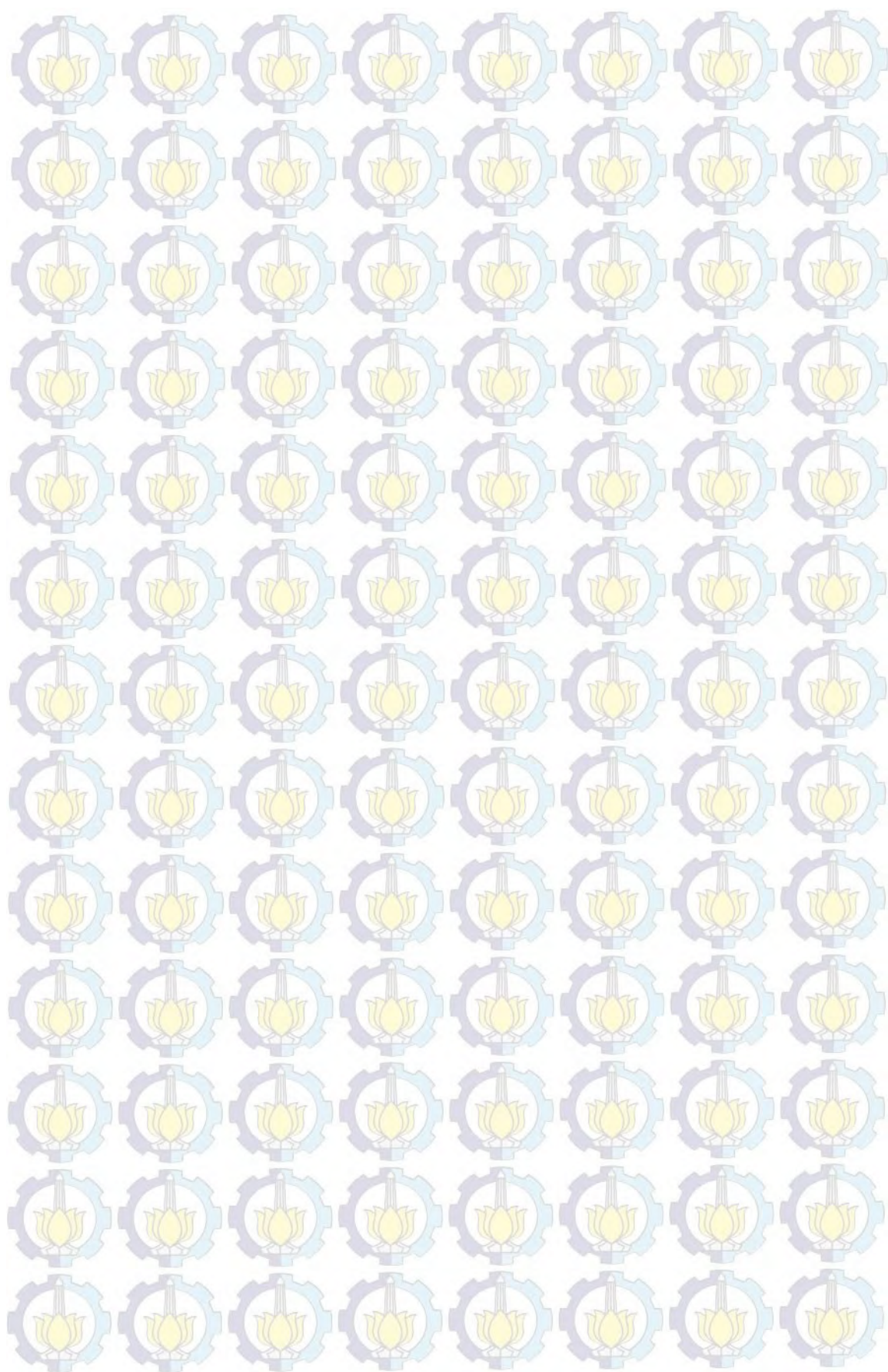
Tabel 4.1 Nilai parameter yang digunakan dalam simulasi 67





DAFTAR LAMPIRAN

Lampiran 1	Source code program Model I	81
Lampiran 2	Source code pengaruh perpindahan individu antarwilayah.....	82
Lampiran 3	Source code program eksistensi	83
Lampiran 4	Source code program Model II.....	84



BAB 1

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Penyakit adalah suatu gangguan kesehatan yang dapat terjadi akibat dari suatu kejadian seperti kurang gizi, bakteri, dan infeksi virus sehingga menimbulkan sakit pada tubuh. Penyakit secara umum dapat dibagi menjadi dua jenis, yaitu penyakit menular dan penyakit tidak menular. Penyakit menular dapat didefinisikan sebagai sebuah penyakit yang dapat ditularkan (berpindah dari orang satu ke orang lain, baik secara langsung maupun perantara). Adapun contoh-contoh penyakit menular yaitu TBC, herpes, influenza, cacar, flu babi, dan campak.

Sementara itu, semakin berkembangnya pembangunan ekonomi, komunikasi lintas budaya, dan mudahnya akses transportasi menjadikan wilayah satu dengan wilayah lainnya terasa lebih dekat. Kondisi ini menyebabkan banyak orang sering bepergian dari wilayah satu ke wilayah lainnya, sehingga perjalanan penduduk antarwilayah dapat menyebabkan penularan penyakit karena memungkinkan individu yang terinfeksi untuk menularkan penyakitnya kepada individu sehat pada saat perjalanan antarwilayah. Selain itu, ada banyak faktor yang menyebabkan dinamika penyakit menular dari manusia. Faktor-faktornya antara lain: populasi yang tidak terkontrol, perkembangan teknologi, gaya hidup, perilaku seksual, dan lain sebagainya.

Perkembangan ilmu pengetahuan di bidang matematika turut memberikan peranan penting dalam menggambarkan fenomena penyebaran penyakit. Peranan tersebut dituangkan dalam bentuk model matematika yang dapat dianalisis sifat-sifatnya. Dengan menggunakan berbagai asumsi, permasalahan yang ada dalam lingkungan kehidupan dapat ditransformasikan dalam model matematika. Dalam model matematika yang ada selanjutnya dapat di analisis perilaku-perilaku yang ada didalamnya. Salah satu kejadian dalam kehidupan manusia dan ditransformasikan dalam model matematika adalah kejadian epidemi.

Salah satu contoh model matematika tersebut adalah model epidemi *SIR* (*Susceptible Infected Removed*). Model *SIR* pertama kali diperkenalkan oleh

Kermack dan McKendrick (1927), yang kemudian menjadi peranan penting dalam perkembangan matematika epidemi. Semakin berkembangnya ilmu pengetahuan, model epidemi *SIR* menjadi motivasi banyak ilmuwan untuk membuat model penyebaran penyakit secara lebih khusus. Model epidemi *SIRS* (*Susceptible Infected Removed Susceptible*) merupakan model yang menggambarkan penyebaran penyakit dimana individu yang pernah terinfeksi dan sembuh tidak memperoleh kekebalan terhadap penyakit sehingga kembali menjadi individu rentan.

Dalam beberapa literatur telah dibahas beberapa model penyebaran penyakit menular antarwilayah. Sattenspiel dan Dietz (1995) memperkenalkan model dengan perjalanan/perpindahan individu antar dua wilayah, mereka mengidentifikasi parameter dalam kasus transmisi campak di pulau Karibia, Dominika. Liu dan Takeuchi (2006) mengkonstruksi model epidemi tipe *SIQ* (*Susceptible Infected Quarantine*) dengan penyebaran penyakit antar dua wilayah dengan metode *entry screening*, yaitu pemeriksaan penyakit menular di jalur masuk kedua wilayah. Kemudian dijelaskan bahwa penyebaran penyakit antar dua wilayah dapat dicegah dengan menggunakan metode *entry screening*. Selain itu, penyebaran suatu penyakit dapat dikendalikan dengan pemberian obat pada individu terinfeksi. Oleh karena itu, pengobatan perlu dilakukan sebagai salah satu upaya untuk mencegah penyebaran penyakit.

Pada penelitian ini dikonstruksi model matematika tipe *SIRS* untuk menggambarkan penyebaran penyakit menular antar dua wilayah dalam dua kasus yang berbeda. Model I dikonstruksi dengan adanya individu yang bepergian antar dua wilayah dan model II dikonstruksi dengan adanya individu yang bepergian antar dua wilayah dan adanya kontrol pengobatan pada populasi *infected*, sehingga menghasilkan populasi baru yaitu populasi *treatment* yang didalamnya terdapat individu dalam masa pengobatan dan model II menjadi model matematika tipe *SITRS* (*Susceptible Infected Treatment Removed Susceptible*). Kedua model dianalisis tentang titik kesetimbangan, bilangan reproduksi dasar, syarat eksistensi dan kestabilan titik kesetimbangan, serta pengaruh perpindahan individu antarwilayah terhadap dinamika penyebaran penyakit dan kontrol optimal pengobatan yang dilakukan pada populasi *infected*. Pada bagian akhir, analisis yang

diperoleh diilustrasikan dengan simulasi numerik menggunakan *software* Matlab dengan tujuan untuk mengetahui pengaruh perpindahan individu antarwilayah bagi penyebaran penyakit dan efektivitas kontrol pengobatan yang telah dilakukan.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah diuraikan, pokok permasalahan yang dikaji dalam tesis ini sebagai berikut.

1. Bagaimana mengkonstruksi model matematika penyebaran penyakit menular antar dua wilayah dengan dua kasus yang berbeda.
2. Bagaimana syarat eksistensi titik kesetimbangan dan menganalisis kestabilannya dari kedua model berdasarkan bilangan reproduksi dasar.
3. Bagaimana mendapatkan kontrol pengobatan yang optimal pada populasi *infected*.
4. Bagaimana hasil simulasi numerik pengaruh perpindahan individu antarwilayah bagi penyebaran penyakit dan efektivitas kontrol pengobatan yang telah diberikan.

1.3 Batasan Masalah

Penulisan tesis ini difokuskan pada pembahasan dengan beberapa batasan masalah sebagai berikut.

1. Individu yang baru lahir memiliki kekebalan alami, sehingga masuk dalam populasi *susceptible*.
2. Interaksi terjadi dalam dua wilayah tanpa adanya individu yang masuk dan keluar dari kedua wilayah tersebut.
3. Kedua wilayah identik, yaitu memiliki kesamaan parameter epidemiologi.
4. Tingkat penularan penyakit dalam wilayah lebih besar daripada tingkat penularan penyakit pada saat perjalanan antarwilayah.
5. Penularan penyakit terjadi akibat kontak langsung antara individu *susceptible* dengan individu *infected* dan individu yang menjadi objek pada penulisan tesis ini adalah manusia.

1.4 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah di atas, tujuan dari penulisan tesis ini adalah sebagai berikut.

1. Mengkonstruksi model matematika penyebaran penyakit menular antar dua wilayah dengan dua kasus yang berbeda.
2. Menentukan syarat eksistensi titik kesetimbangan dan menganalisis kestabilannya dari kedua model berdasarkan bilangan reproduksi dasar.
3. Mendapatkan kontrol pengobatan yang optimal pada populasi *infected*.
4. Mengetahui hasil simulasi numerik pengaruh perpindahan individu antarwilayah bagi penyebaran penyakit dan efektivitas kontrol pengobatan yang telah diberikan.

1.5 Manfaat Penelitian

Manfaat dari penulisan tesis ini adalah sebagai berikut.

1. Memberikan informasi untuk penelitian selanjutnya tentang penyebaran penyakit menular antar dua wilayah dengan menggunakan kontrol optimal.
2. Mengetahui bahwa pemberian kontrol pengobatan dapat menjadi salah satu solusi dalam mengatasi masalah penyebaran penyakit.

BAB 2

KAJIAN PUSTAKA DAN DASAR TEORI

2.1 Model Penyebaran Penyakit Antarwilayah

Penyebaran penyakit menular antarwilayah merupakan fenomena yang melibatkan banyak kompartemen yang berbeda. Untuk mengendalikan penyebaran penyakit menular, harus dipahami terlebih dahulu bagaimana pertumbuhan dan penyebaran penyakit tersebut. Salah satu faktor yang menyebabkan penyebaran penyakit menular semakin meluas adalah perpindahan individu antarwilayah.

Dalam ilmu matematika, beberapa model matematika epidemi antarwilayah telah dipelajari. Arino dan Driessche (2003) mengkonstruksi model epidemi multi kota untuk menganalisis penyebaran penyakit menular secara spasial. Kemudian Arino, dkk (2005) menganalisis model epidemi tipe *SEIR* dengan multi spesies dan multi bagian (*patch*). Dari kedua penelitian tersebut diasumsikan bahwa penularan infeksi pada saat perjalanan antarwilayah diabaikan. Sementara itu, model epidemi yang memperhatikan penularan infeksi pada saat perjalanan antarwilayah dikemukakan oleh Cui, dkk (2006) dengan model matematika tipe *SIS*, selanjutnya Wan dan Cui (2007) mengkonstruksi model tipe *SEIS*. Dilakukan analisis yang sama dari kedua penelitian tersebut yaitu, membandingkan model ketika $\alpha = 0$ dengan $\alpha \neq 0$ dimana α adalah tingkat perpindahan individu antarwilayah. Tujuan dari penelitian tersebut adalah untuk mengetahui seberapa besar pengaruh perpindahan individu terhadap penyebaran penyakit menular antarwilayah. Sementara itu Liu dan Zhou (2009) mengkonstruksi model matematika tipe *SIRS*, dilakukan analisis stabilitas global pada titik kesetimbangan bebas penyakit dan titik kesetimbangan endemi.

Berbeda dengan penelitian sebelumnya, pada tesis ini akan dibahas model penyebaran penyakit menular antar dua wilayah tipe *SITRS* menggunakan kontrol pengobatan dengan tujuan untuk meminimalkan jumlah individu yang terinfeksi. Berikut adalah beberapa fenomena penyakit yang menggambarkan model penyebaran penyakit tipe *SITRS*.

2.1.1 Fenomena Penyakit TBC

Tuberkulosis (TBC) adalah penyakit menular langsung yang disebabkan oleh *Mycobacterium tuberculosis*, yang sebagian besar (80%) menyerang paru-paru. *Mycobacterium tuberculosis* termasuk gram positif, berbentuk batang, dinding selnya mengandung kompleks lipida-glikolipida serta lilin (wax) yang sulit ditembus zat kimia.

TBC merupakan penyakit infeksi saluran napas yang paling sering terjadi di Indonesia. Keterlambatan dalam menegakkan diagnosa dan ketidakpatutan dalam menjalani pengobatan, mempunyai dampak yang besar karena pasien TBC akan menularkan penyakitnya pada lingkungan. Sehingga, hal ini perlu dukungan dan perhatian yang lebih dari semua pihak guna mengurangi jumlah penderita TBC yang semakin bertambah setiap tahunnya. Penyakit TBC dapat menyerang siapa saja dan dimana saja. Setiap tahunnya, Indonesia bertambah dengan seperempat juta kasus baru TBC dan sekitar 140.000 kematian terjadi setiap tahunnya disebabkan oleh TBC. Bahkan, Indonesia adalah Negara ketiga terbesar dengan masalah TBC di dunia. Survei prevalensi TBC yang dilakukan di enam propinsi pada tahun 1983-1993 menunjukkan bahwa prevalensi TBC di Indonesia berkisar antara 0,2-0,65%. Sedangkan menurut WHO pada tahun 2002 angka insidensi TBC mencapai 555.000 kasus.

Sumber penularan adalah penderita TBC pada waktu batuk atau bersin, penderita menyebarkan kuman ke udara dalam bentuk droplet (percikan dahak). Droplet yang mengandung kuman dapat bertahan di udaran pada suhu kamar selama beberapa jam. Orang dapat terinfeksi seandainya droplet tersebut terhirup kedalam saluran pernapasan. Jadi penularan TBC tidak terjadi melalui perlengkapan makan, baju, dan perlengkapan tidur.

Menurut Departemen Kesehatan RI (2005) cara pengobatan yang dapat dilakukan untuk menyembuhkan penyakit TBC adalah dengan menggunakan obat antibiotik dan antiinfeksi sintetis untuk membunuh kuman *Mycobacterium*. Aktifitas obat TBC didasarkan atas tiga mekanisme, yaitu aktifitas membunuh bakteri, aktifitas sterilisasi, dan mencegah resistensi. Obat yang umum dipakai adalah Isoniazid, Etambutol, Rifampisin, Pirazinamid, dan Streptomisin.

2.1.2 Fenomena Penyakit Influenza

Influenza yang dikenal sebagai flu adalah penyakit pernapasan yang sangat menular dan disebabkan oleh virus tipe A, B dan C. Influenza merupakan suatu penyakit infeksi akut saluran pernapasan terutama ditandai oleh demam, menggigil, sakit otot, sakit kepala dan sering disertai pilek, sakit tenggorok dan batuk non produktif.

Influenza merupakan penyakit yang dapat menjalar dengan cepat di lingkungan masyarakat. Walaupun ringan penyakit ini tetap berbahaya untuk mereka yang berusia sangat muda dan orang dewasa dengan fungsi kardiopulmoner yang terbatas. Juga pasien yang berusia lanjut dengan penyakit ginjal kronik atau gangguan metabolik endokrin dapat meninggal akibat penyakit yang dikenal tidak berbahaya ini. Serangan penyakit ini tercatat paling tinggi pada musim dingin di negara beriklim dingin dan pada waktu musim hujan di negara tropik. Pada saat ini sudah diketahui bahwa pada umumnya dunia dilanda pandemi oleh influenza 2-3 tahun sekali. Jumlah kematian pada pandemi ini dapat mencapai puluhan ribu orang dan jauh lebih tinggi dari pada angka-angka pada keadaan non-epidemi.

Penyakit tersebut hingga saat ini masih mempengaruhi sebagian besar populasi manusia setiap tahun. Virus influenza mudah bermutasi dengan cepat, bahkan seringkali memproduksi strain baru di mana manusia tidak mempunyai imunitas terhadapnya. Ketika keadaan ini terjadi, mortalitas influenza berkembang sangat cepat. Di Amerika Serikat epidemi influenza yang biasanya muncul setiap tahun pada musim dingin atau salju menyebabkan rata-rata hampir 20.000 kematian. Sedangkan di Indonesia atau di negara-negara tropis pada umumnya kejadian wabah influenza dapat terjadi sepanjang tahun dan puncaknya akan terjadi pada bulan Juli.

Penularan influenza dapat dimodelkan secara matematis, yang akan membantu dalam prediksi bagaimana virus menyebar dalam populasi. Influenza dapat disebarkan dalam dua cara utama yaitu:

- a. Melalui penularan langsung (saat orang yang terinfeksi bersin, terdapat lendir hidung yang masuk secara langsung pada mata, hidung, dan mulut dari orang lain).

b. Melalui udara (saat seseorang menghirup aerosol (butiran cairan kecil dalam udara) yang dihasilkan saat orang yang terinfeksi batuk, bersin, atau meludah).

Virus influenza mempunyai sifat dapat bertahan hidup di air sampai 4 hari pada suhu 22°C dan lebih dari 30 hari pada suhu 0°C. Mati pada pemanasan 60°C selama 30 menit atau 56°C selama 3 jam dan pemanasan 80°C selama 1 jam. Virus akan mati dengan deterjen, disinfektan misalnya formalin, cairan yang mengandung iodine dan alkohol 70%.

Struktur antigenik virus influenza meliputi antara lain 3 bagian utama berupa: antigen S (atau soluble antigen), hemagglutinin dan neuramidase. Antigen S merupakan suatu inti partikel virus yang terdiri atas ribonukleoprotein. Antigen ini spesifik untuk masing-masing tipe. Hemagglutinin menonjol keluar dari selubung virus dan memegang peran pada imunitas terhadap virus.

Dua kelas obat antivirus yang dipergunakan terhadap influenza adalah inhibitor neuraminidase dan inhibitor protein M2 (derivat adamantane). Inhibitor neuraminidase saat ini lebih disukai terhadap infeksi virus karena kurang toksik dan lebih efektif. CDC merekomendasikan untuk tidak mempergunakan inhibitor M2 pada musim influenza 2005-2006 karena tingginya tingkat resistensi obat.

(Nurhayati, 2012)

2.2 Sistem Dinamik

Sistem dinamik adalah sistem dimana kondisi pada masa sekarang atau masa lampunya diketahui, sehingga nilai yang akan datang sistem tersebut dapat diselidiki (Nagle et al, 2012).

Menurut Boyce dan DiPrima (2009) Suatu sistem persamaan diferensial yang berbentuk

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= F_1(x_1, x_2) \\ \frac{dx_2}{dt} &= F_2(x_1, x_2)\end{aligned}\tag{2.1}$$

dengan fungsi F_1 dan F_2 tidak bergantung secara eksplisit terhadap waktu t disebut sistem persamaan diferensial yang bersifat *autonomous*. Terdapat dua jenis sistem *autonomous*, yaitu sistem *autonomous* linear dan nonlinear.

2.3 Titik Keseimbangan

Misalkan diberikan suatu sistem *autonomous*

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= F_1(x_1, x_2, x_3, x_4) \\ \frac{dx_2}{dt} &= F_2(x_1, x_2, x_3, x_4) \\ \frac{dx_3}{dt} &= F_3(x_1, x_2, x_3, x_4) \\ \frac{dx_4}{dt} &= F_4(x_1, x_2, x_3, x_4)\end{aligned}\quad (2.2)$$

Titik $(x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*)$ yang memenuhi $F_1(x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*) = F_2(x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*) = F_3(x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*) = F_4(x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*) = 0$ disebut titik kritis atau titik kestimbangan sistem (2.2). Jika titik $(x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*)$ adalah titik kesetimbangan sistem *autonomous* (2.2) maka fungsi-fungsi konstan $x_1(t) = x_1^*$, $x_2(t) = x_2^*$, $x_3(t) = x_3^*$, $x_4(t) = x_4^*$ merupakan penyelesaian dari sistem *autonomous* (2.2). Artinya penyelesaian yang didapat memiliki hasil yang tetap seiring berubah waktu. (Boyce & DiPrima, 2009).

2.4 Kestabilan Lokal Pada Titik Keseimbangan

Misal Suatu sistem *autonomous* dikatakan linear bila variabelnya memiliki pangkat tertinggi satu atau berderajat satu. Persamaan berikut ini merupakan sistem *autonomous* linear.

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 \\ \frac{dx_2}{dt} &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 \\ \frac{dx_3}{dt} &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 \\ \frac{dx_4}{dt} &= a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4\end{aligned}\quad (2.3)$$

dengan a_{ij} adalah konstanta riil, untuk $i, j=1, \dots, 4$. Persamaan (2.3) dapat dinyatakan dalam bentuk matriks

$$\begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \\ \frac{dx_3}{dt} \\ \frac{dx_4}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

atau secara ringkas dapat dituliskan sebagai $\frac{d\bar{x}}{dt} = A\bar{x}$.

Misalkan akar-akar persamaan karakteristik sistem (2.3) adalah $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, dan λ_4 , maka $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, dan λ_4 disebut nilai eigen. Nilai eigen tersebut digunakan untuk menentukan jenis kestabilan titik kesetimbangan sistem (2.3). Untuk memperoleh nilai eigen digunakan rumus $\det(A - \lambda I) = 0$. Kriteria jenis kestabilan titik kesetimbangan sistem (2.3) berdasarkan nilai eigen dijelaskan sebagai berikut.

Misalkan $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, dan λ_4 adalah nilai eigen matriks koefisien A sistem *autonomous* linear dengan $\det(A) \neq 0$. Titik kesetimbangan $(x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*)$ bersifat

- stabil asimtotik, jika bagian riil semua nilai eigen matriks A negatif,
- stabil center, jika semua nilai eigen memiliki bagian riil bernilai nol,
- tidak stabil, jika sedikitnya satu nilai eigen memiliki bagian riil positif

(Edwards & Penney, 2008).

Kemudian untuk sistem *autonomous* yang berbentuk nonlinear adalah variabelnya memiliki pangkat tertinggi lebih dari satu,

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= F_1(x_1, x_2, x_3, x_4) \\ \frac{dx_2}{dt} &= F_2(x_1, x_2, x_3, x_4) \\ \frac{dx_3}{dt} &= F_3(x_1, x_2, x_3, x_4) \\ \frac{dx_4}{dt} &= F_4(x_1, x_2, x_3, x_4) \end{aligned} \quad (2.4)$$

Asumsikan F_1, F_2, F_3 dan F_4 mempunyai turunan parsial yang kontinu di titik $\bar{x}^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*)$. Deret Taylor fungsi F_1, F_2, F_3 dan F_4 disekitar \bar{x}^* adalah

$$F_1(\bar{x}) = F_1(\bar{x}^*) + \frac{\partial F_1(\bar{x}^*)}{\partial x_1}(x_1 - x_1^*) + \frac{\partial F_1(\bar{x}^*)}{\partial x_2}(x_2 - x_2^*) + \frac{\partial F_1(\bar{x}^*)}{\partial x_3}(x_3 - x_3^*) + \frac{\partial F_1(\bar{x}^*)}{\partial x_4}(x_4 - x_4^*) + \eta_1(\bar{x}) \quad (2.5)$$

$$F_2(\bar{x}) = F_2(\bar{x}^*) + \frac{\partial F_2(\bar{x}^*)}{\partial x_1}(x_1 - x_1^*) + \frac{\partial F_2(\bar{x}^*)}{\partial x_2}(x_2 - x_2^*) + \frac{\partial F_2(\bar{x}^*)}{\partial x_3}(x_3 - x_3^*) + \frac{\partial F_2(\bar{x}^*)}{\partial x_4}(x_4 - x_4^*) + \eta_2(\bar{x}) \quad (2.6)$$

$$F_3(\bar{x}) = F_3(\bar{x}^*) + \frac{\partial F_3(\bar{x}^*)}{\partial x_1}(x_1 - x_1^*) + \frac{\partial F_3(\bar{x}^*)}{\partial x_2}(x_2 - x_2^*) + \frac{\partial F_3(\bar{x}^*)}{\partial x_3}(x_3 - x_3^*) + \frac{\partial F_3(\bar{x}^*)}{\partial x_4}(x_4 - x_4^*) + \eta_3(\bar{x}) \quad (2.7)$$

$$F_4(\bar{x}) = F_4(\bar{x}^*) + \frac{\partial F_4(\bar{x}^*)}{\partial x_1}(x_1 - x_1^*) + \frac{\partial F_4(\bar{x}^*)}{\partial x_2}(x_2 - x_2^*) + \frac{\partial F_4(\bar{x}^*)}{\partial x_3}(x_3 - x_3^*) + \frac{\partial F_4(\bar{x}^*)}{\partial x_4}(x_4 - x_4^*) + \eta_4(\bar{x}) \quad (2.8)$$

dengan $\eta_1(\bar{x}), \eta_2(\bar{x}), \eta_3(\bar{x})$ dan $\eta_4(\bar{x})$ adalah suku sisa.

Karena $\frac{dx_1}{dt} = \frac{d}{dt}(x_1 - x_1^*)$, $\frac{dx_2}{dt} = \frac{d}{dt}(x_2 - x_2^*)$, $\frac{dx_3}{dt} = \frac{d}{dt}(x_3 - x_3^*)$, dan $\frac{dx_4}{dt} = \frac{d}{dt}(x_4 - x_4^*)$ maka persamaan (2.5)-(2.8) dapat ditulis dalam bentuk matriks, sebagai

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 - x_1^* \\ x_2 - x_2^* \\ x_3 - x_3^* \\ x_4 - x_4^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1(\bar{x}^*) \\ F_2(\bar{x}^*) \\ F_3(\bar{x}^*) \\ F_4(\bar{x}^*) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} & \frac{\partial F_1}{\partial x_3} & \frac{\partial F_1}{\partial x_4} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} & \frac{\partial F_2}{\partial x_3} & \frac{\partial F_2}{\partial x_4} \\ \frac{\partial F_3}{\partial x_1} & \frac{\partial F_3}{\partial x_2} & \frac{\partial F_3}{\partial x_3} & \frac{\partial F_3}{\partial x_4} \\ \frac{\partial F_4}{\partial x_1} & \frac{\partial F_4}{\partial x_2} & \frac{\partial F_4}{\partial x_3} & \frac{\partial F_4}{\partial x_4} \end{bmatrix} (\bar{x}^*) \begin{bmatrix} x_1 - x_1^* \\ x_2 - x_2^* \\ x_3 - x_3^* \\ x_4 - x_4^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \eta_1(\bar{x}) \\ \eta_2(\bar{x}) \\ \eta_3(\bar{x}) \\ \eta_4(\bar{x}) \end{bmatrix}$$

Matriks $\begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} & \frac{\partial F_1}{\partial x_3} & \frac{\partial F_1}{\partial x_4} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} & \frac{\partial F_2}{\partial x_3} & \frac{\partial F_2}{\partial x_4} \\ \frac{\partial F_3}{\partial x_1} & \frac{\partial F_3}{\partial x_2} & \frac{\partial F_3}{\partial x_3} & \frac{\partial F_3}{\partial x_4} \\ \frac{\partial F_4}{\partial x_1} & \frac{\partial F_4}{\partial x_2} & \frac{\partial F_4}{\partial x_3} & \frac{\partial F_4}{\partial x_4} \end{bmatrix} (\bar{x}^*)$ disebut matriks Jacobi atau *partial derivative matrix* dan dinotasikan dengan $J(\bar{x}^*)$ atau disingkat J .

Jika diasumsikan $\dot{x}_1 = x_1 - x_1^*$, $\dot{x}_2 = x_2 - x_2^*$, $\dot{x}_3 = x_3 - x_3^*$, dan $\dot{x}_4 = x_4 - x_4^*$ dan dapat ditulis kembali dalam bentuk

$$\begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \\ \frac{dx_3}{dt} \\ \frac{dx_4}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} & \frac{\partial F_1}{\partial x_3} & \frac{\partial F_1}{\partial x_4} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} & \frac{\partial F_2}{\partial x_3} & \frac{\partial F_2}{\partial x_4} \\ \frac{\partial F_3}{\partial x_1} & \frac{\partial F_3}{\partial x_2} & \frac{\partial F_3}{\partial x_3} & \frac{\partial F_3}{\partial x_4} \\ \frac{\partial F_4}{\partial x_1} & \frac{\partial F_4}{\partial x_2} & \frac{\partial F_4}{\partial x_3} & \frac{\partial F_4}{\partial x_4} \end{bmatrix} (x^*) \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \\ \eta_4 \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

Persamaan (2.9) dapat ditulis sebagai

$$\frac{d\vec{w}}{dt} = J\vec{w} + \vec{\eta}$$

Untuk $\vec{w} = (\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3, \dot{x}_4)$ dan $\vec{\eta} = (\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4)$. Bila (x_1, x_2, x_3, x_4) cukup dekat dengan $(x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*)$ maka $(\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3, \dot{x}_4)$ bernilai kecil, sehingga $\|\vec{\eta}\| \ll \|\vec{w}\|$. Oleh karena itu, $\vec{\eta}$ dapat diabaikan dan sistem nonlinear (2.4) dapat di hampiri oleh sistem linear

$$\frac{d\vec{w}}{dt} = J\vec{w}$$

Jika nilai eigen yang diperoleh dari matriks Jacobi adalah $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3 \neq \lambda_4$ dan $\text{Re}(\lambda_i) \neq 0, (i = 1,2,3,4)$ maka kestabilan dari titik kesetimbangan sistem *autonomous* nonlinear yang dilinearkan dapat ditentukan berdasarkan analisis kestabilan dari sistem *autonomous* linear, seperti yang ditampilkan pada Tabel 2.1.

Tabel 2.1 Kriteria kestabilan titik kesetimbangan sistem *autonomous* nonlinear

Nilai Eigen	Kriteria	Kestabilan	Bentuk
$\lambda_{1,2,3,4} \in \mathbb{R}$	$\lambda_{1,2,3,4} > 0$	Tak stabil	Simpul
	$\lambda_{1,2,3,4} < 0$	Stabil asimtotik	Simpul
	Minimal satu $\lambda > 0$	Tak stabil	Pelana
$\lambda_{1,2,3,4} = a \pm bi$ $\in \mathbb{C}$	$a > 0$	Tak stabil	Spiral
	$a < 0$	Stabil asimtotik	Spiral
	$a = 0$	Tidak dapat ditentukan	Elips/Lingkaran

(Boyce & DiPrima, 2009).

2.5 Kriteria Routh-Hurwitz

Nilai eigen matriks Jacobi dapat diperoleh dengan menyelesaikan persamaan karakteristik yang dapat juga ditulis sebagai

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \dots + a_n = 0 \quad (2.10)$$

Persamaan (2.10) umumnya sulit untuk diselesaikan. Dalam hal ini dapat digunakan Kriteria Routh-Hurwitz sebagai alat bantu untuk mengetahui sifat kestabilan nilai eigen matriks Jacobi.

Teorema 2.1 Kriteria Routh-Hurwitz

Akar-akar persamaan karakteristik (2.10) mempunyai bagian riil negatif jika $a_n > 0$ dan

$$D_1 = a_1 > 0; D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ 1 & a_2 \end{vmatrix} > 0; D_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ 1 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} > 0; \dots; D_k = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 & \dots & . \\ a_3 & a_2 & a_1 & \dots & . \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{vmatrix} > 0, k = 1, 2, \dots, n.$$

Untuk $n = 4$, persamaan (2.10) menjadi

$$\lambda^4 + a_1\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_3\lambda + a_4 = 0 \quad (2.11)$$

Akar-akar persamaan (2.11) akan bernilai negatif jika dan hanya jika a_1 dan $a_1a_2 - a_3$ bernilai positif serta $a_1a_2a_3 + a_1a_5 > a_4a_1^2 + a_3^2$ (Murray, 2002).

Kriteria Routh-Hurwitz untuk kasus khusus matriks

$$Q = \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & 0 \\ 0 & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

dapat diselesaikan dengan Lemma 2.1. Persamaan karakteristik matriks Q adalah

$$\lambda^3 + Q_1\lambda^2 + Q_2\lambda + Q_3 = 0$$

Lemma 2.1

Misalkan $Q_1 = -\text{tr}(Q)$, $Q_2 = Q_a + Q_b$, dimana $Q_a = a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}$, $Q_b = a_{22}a_{44} + a_{33}a_{44}$ dan $Q_3 = -(a_{22}a_{33}a_{44} + a_{24}a_{32}a_{43} - a_{23}a_{32}a_{44})$.

Persamaan karakteristik matriks Q akan mempunyai nilai eigen negatif jika dan hanya jika memenuhi kondisi

- (i) $Q_1 > 0$,
- (ii) $Q_3 > 0$,
- (iii) $Q_1 Q_2 - Q_3 > 0$.

2.6 Bilangan Reproduksi Dasar

Bilangan reproduksi dasar (\mathcal{R}_0) didefinisikan sebagai bilangan yang menunjukkan banyaknya infeksi baru yang disebabkan oleh individu terinfeksi selama individu tersebut hidup sebagai individu yang terinfeksi. Jika $\mathcal{R}_0 < 1$ maka setiap individu yang terinfeksi memproduksi kurang dari satu individu terinfeksi baru, dengan kata lain dapat diprediksi bahwa infeksi akan bersih dari populasi. Sebaliknya, jika $\mathcal{R}_0 > 1$ maka individu yang terinfeksi memproduksi lebih dari satu individu terinfeksi baru. Dalam keadaan endemi, dapat ditentukan suatu tindakan pengendalian dan besarnya nilai parameter yang tepat, sehingga $\mathcal{R}_0 < 1$. Sedangkan jika $\mathcal{R}_0 = 1$ maka terjadi bifurkasi yang dapat didefinisikan sebagai perubahan stabilitas dan banyaknya titik kesetimbangan yang diakibatkan oleh perubahan parameter, dan $\mathcal{R}_0 = 1$ disebut titik bifurkasi dimana fenomena sebuah sistem terbagi kedalam dua kemungkinan perilaku akibat perubahan parameter.

Diasumsikan populasi dapat dikelompokkan ke dalam n kompartemen. Diberikan $x = (x_1 \dots x_n)^T$ dengan $x_i \geq 0$, dimana x_i adalah banyaknya individu pada masing-masing kompartemen. Kemudian diberikan X_s adalah himpunan dari semua titik kesetimbangan bebas penyakit dan didefinisikan sebagai berikut

$$X_s = \{x \geq 0 | x_i = 0, i = 1, \dots, m\}$$

dengan m adalah banyaknya kompartemen yang terdapat individu terinfeksi. Untuk menghitung nilai dari \mathcal{R}_0 terdapat beberapa langkah. Pertama didefinisikan $\mathcal{F}_i(x)$ adalah laju dari kemunculan infeksi baru pada kompartemen i , sedangkan $\mathcal{V}_i^-(x)$ adalah laju dari perpindahan individu keluar dari kompartemen i dan $\mathcal{V}_i^+(x)$ adalah laju dari perpindahan individu masuk ke kompartemen i . Model penyebaran penyakit terdiri dari kondisi awal non negatif dengan persamaan sistem sebagai berikut.

$$\dot{x}_i = f_i(x) = \mathcal{F}_i(x) - \mathcal{V}_i(x), i = 1, \dots, n$$

dengan $\mathcal{V}_i(x) = \mathcal{V}_i^-(x) - \mathcal{V}_i^+(x)$. Kemudian langkah kedua harus memenuhi asumsi-asumsi berikut.

1. Setiap fungsi mempresentasikan perpindahan langsung dari individu, sehingga semua fungsi bernilai non negatif, maka dapat ditulis

$$\text{Jika } x \geq 0, \text{ maka } \mathcal{F}_i(x), \mathcal{V}_i^-(x), \mathcal{V}_i^+(x) \geq 0 \text{ untuk } i = 1, \dots, n.$$

2. Jika sebuah kompartemen kosong dikarenakan kematian atau infeksi, maka tidak ada individu yang keluar dari kompartemen.

Jika $x_i = 0$ maka $\mathcal{V}_i^- = 0$. Secara khusus, jika $x \in X_s$, maka $\mathcal{V}_i^- = 0$ untuk $i = 1, \dots, m$.

3. Untuk kondisi selanjutnya berdasarkan dari fakta sederhana bahwa jika timbulnya infeksi untuk kompartemen yang tidak terinfeksi adalah nol, maka dapat ditulis

$$\mathcal{F}_i = 0, \text{ jika } i > m.$$

4. Jika populasi bebas dari penyakit maka populasi akan tetap bebas dari penyakit (tidak ada imigrasi atau infeksi).

$$\text{Jika } x \in X_s, \text{ maka } \mathcal{F}_i(x) = 0 \text{ dan } \mathcal{V}_i^+ = 0 \text{ untuk } i = 1, \dots, m.$$

5. Berdasarkan turunan dari f didekat titik kesetimbangan bebas penyakit (DFE), didefinisikan DFE dari f adalah penyelesaian kestabilan lokal dari titik kesetimbangan bebas penyakit, dengan f terbatas ke X_s . Jika populasi ada disekitar DFE, maka populasi akan kembali ke DFE menurut linearisasi sistem:

$$\dot{x} = Df(x_0)(x - x_0), \text{ dengan } Df(x_0) = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$$

Sehingga dapat ditulis,

jika $\mathcal{F}(x)$ menuju ke nol, maka semua nilai eigen dari $Df(x_0)$ mempunyai bagian real negatif.

Dari asumsi 1-5 di atas didapatkan Lemma 2.2 sebagai berikut

Lemma 2.2

Jika x_0 adalah titik kesetimbangan bebas penyakit dan $f_i(x)$ memenuhi asumsi 1-5, maka turunan $D\mathcal{F}(x_0)$ dan $D\mathcal{V}(x_0)$ adalah partisi sebagai berikut

$$D\mathcal{F}(x_0) = \begin{pmatrix} F & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D\mathcal{V}(x_0) = \begin{pmatrix} V & 0 \\ J_3 & J_4 \end{pmatrix}$$

Dengan F dan V adalah matriks berukuran $m \times m$ yang didefinisikan sebagai berikut

$$F = \left[\frac{\partial \mathcal{F}_i(x_0)}{\partial x_j} \right], V = \left[\frac{\partial \mathcal{V}_i(x_0)}{\partial x_j} \right], \text{ dengan } 1 \leq i, j \leq m$$

Dengan F non negatif dan V merupakan M-matriks *non-singular*, dan semua nilai eigen dari J_3 dan J_4 adalah positif.

Definisi 2.1

Matriks V merupakan M-matriks non singular jika dan hanya jika terdapat bilangan k dan matriks P sedemikian sehingga diketahui $k > \rho(P)$ yang memenuhi $V = kI - P$.

Matriks generasi selanjutnya adalah $A = FV^{-1}$ dan angka reproduksi dasar dapat dituliskan sebagai

$$\mathcal{R}_0 = \rho(FV^{-1}) = \rho(A),$$

dengan $\rho(A)$ adalah *spectral radius* dari matriks A , yaitu maksimum modulus nilai eigen dari matriks A (Driessche & Wetmough, 2002).

2.7 Teori Kontrol Optimal

Tujuan utama dari permasalahan kontrol optimal yaitu untuk mencari nilai kontrol $u(t)$ yang akan diproses dalam sistem dinamik dan memenuhi kendala fisik atau konstrain, dengan tujuan memaksimalkan atau meminimumkan fungsi objektif. Kontrol dengan keadaan dan waktu yang sama dapat ditentukan nilai optimalnya berdasarkan fungsi tujuan yang diberikan. Formulasi masalah kontrol optimal terdiri dari deskripsi secara matematis suatu sistem atau model, menentukan fungsi objektif dan kendala atau syarat batas yang berlaku. Secara umum, masalah kontrol optimal diformulasikan sebagai berikut. Misalkan suatu sistem dinamik diberikan oleh persamaan

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t), \quad (2.12)$$

dengan keadaan awal $x(t_0) = x_0$ dan keadaan akhir $x(t_f) = x_f$ serta $u(t)$ yang menyatakan kontrol keadaan pada waktu t .

Pada umumnya, masalah kontrol optimal dapat diformulasikan sebagai berikut

$$J(u(t)) = S(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} V(x(t), u(t), t) dt \quad (2.13)$$

Fungsi tujuan merupakan ukuran kuantitas dari suatu sistem. Dalam masalah penyebaran penyakit menular, fungsi tujuan memberikan ukuran kuantitas yang tepat untuk mengurangi jumlah individu yang terinfeksi.

Kontrol $u^*(t)$ merupakan kontrol optimal, jika disubstitusikan ke dalam sistem (2.12) akan diperoleh *state* yang optimal $x^*(t)$ dan pada saat yang sama juga mengoptimalkan fungsi tujuan (2.13) yang kemudian dinotasikan dengan $J^*(x^*(t))$. *State* optimal $x^*(t)$ dibatasi oleh kondisi batas, yaitu kondisi awal dan kondisi akhir. Bentuk umum $J(u(t))$ dinamakan bentuk Bolza dengan S adalah bentuk Meyer dan V adalah bentuk Lagrange (Naidu, 2002).

2.8 Prinsip Maksimum Pontryagin

Berdasarkan Prinsip Maksimum Pontryagin, kondisi perlu dari masalah kontrol optimal yang harus diselesaikan adalah persamaan stasioner, persamaan *state*, dan persamaan *costate* serta kondisi transversality. Prinsip Maksimum Pontryagin menyatakan bahwa persamaan Hamiltonian akan dimaksimalkan sepanjang \mathcal{U} yang merupakan himpunan kontrol yang mungkin. Hasilnya juga dapat dinamakan Prinsip Minimum Pontryagin karena mempunyai pengertian yang sama antara meminimalkan dan memaksimalkan dengan mengalikan (-1) pada indeks performansi. Langkah penyelesaian kontrol optimal adalah sebagai berikut:

1. Bentuk fungsi Hamiltonian

$$H(x(t), u(t), \lambda(t), t) = V(x(t), u(t), t) + \lambda'(t)f(x(t), u(t), t)$$

2. Meminimumkan H terhadap semua vektor kontrol $u(t)$

$$\left(\frac{\partial H}{\partial u} \right)_* = 0$$

Kemudian diperoleh kondisi stasioner

$$u^*(t) = h(x^*(t), \lambda^*(t), t)$$

3. Dengan menggunakan $u^*(t)$ yang telah dihasilkan pada langkah 2, akan didapatkan fungsi Hamiltonian baru yang optimal H^* , yaitu

$$H^*(t)(x^*(t), h(x^*(t), \lambda^*(t), t), \lambda^*(t), t) = H^*(x^*(t), \lambda^*(t), t)$$

4. Selesaikan $2n$ persamaan *state* dan *costate*

$$\dot{x}^*(t) = + \left(\frac{\partial H}{\partial \lambda} \right)_* \text{ dan } \dot{\lambda}^*(t) = - \left(\frac{\partial H}{\partial x} \right)_*$$

dengan kondisi awal x_0 dan kondisi akhir

$$\left[H^* + \frac{\partial S}{\partial t} \right]_{t_f} \delta t_f + \left[\left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)_* - \lambda^*(t) \right]_{t_f}' \delta x_f = 0$$

5. Subtitusikan hasil-hasil yang diperoleh pada langkah 4 ke dalam persamaan

$u^*(t)$ pada langkah 2 untuk mendapatkan kontrol yang optimal.

(Naidu, 2002).

BAB 3 METODE PENELITIAN

Pada bagian ini diuraikan beberapa metode penelitian yang digunakan untuk mencapai tujuan penelitian.

1. Studi Literatur

Berdasarkan permasalahan yang telah dirumuskan, maka diperlukan studi literatur lebih lanjut sebagai bahan acuan untuk pemecahan masalah. Studi literatur ini bisa dilakukan dengan mempelajari kasus penyebaran penyakit antarwilayah, sistem dinamik, titik kesetimbangan, Kriteria Routh-Hurwitz, bilangan reproduksi dasar, teori kontrol optimal, Prinsip Maksimum Pontryagin serta referensi lainnya yang mendukung dalam pemecahan masalah.

2. Konstruksi Model

Pada tahap ini dilakukan konstruksi model penyebaran penyakit menular antar dua wilayah. Pada penelitian ini dibagi menjadi dua model, yaitu model I dikonstruksi model matematika tipe *SIRS* dengan adanya individu yang bepergian antar dua wilayah dan model II dikonstruksi dengan adanya individu yang bepergian antar dua wilayah dan adanya kontrol pengobatan pada populasi *infected*, sehingga menghasilkan populasi baru yaitu populasi *treatment* yang didalamnya terdapat individu dalam masa pengobatan dan model II menjadi model matematika tipe *SITRS* (*Susceptible Infected Treatment Removed Susceptible*).

3. Analisis Dinamik

Pada tahap ini dilakukan analisis dinamik kedua model yang telah dikonstruksi, yaitu pencarian titik kesetimbangan, bilangan reproduksi dasar (\mathcal{R}_0), syarat eksistensi dan kestabilan titik kesetimbangan model.

4. Analisis Kontrol Optimal

Pada tahap ini ditentukan formulasi masalah kontrol optimal yang meliputi sistem dinamik dan fungsi objektif, serta kondisi syarat batas yang harus dipenuhi. Tujuan pada penelitian ini adalah untuk meminimalkan jumlah

individu terinfeksi dengan melakukan pengobatan yang optimal. Kemudian dilakukan penyelesaian kontrol optimal yang telah diformulasikan pada tahap sebelumnya. Metode yang digunakan dalam penyelesaian tersebut adalah Prinsip Maksimum Pontryagin.

5. Program Simulasi

Pada tahap ini dilakukan suatu simulasi dengan menggunakan *software* Matlab untuk melihat perubahan banyaknya individu di masing-masing populasi pada saat $\mathcal{R}_0 < 1$ dan $\mathcal{R}_0 > 1$. Kemudian dilakukan simulasi pengaruh perpindahan individu antarwilayah terhadap penyebaran penyakit. Selanjutnya mengetahui efektivitas pemberian kontrol pengobatan pada populasi *infected*.

6. Analisis Hasil dan Pembahasan

Hasil yang diperoleh dari analisis dinamik ditampilkan dalam bentuk simulasi, untuk kemudian dicari solusi yang terbaik dari penyebaran penyakit menular antar dua wilayah.

7. Penyusunan Tesis

BAB 4

HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bab ini dibahas dua model epidemi yang berbeda, yaitu model I dikonstruksi dengan adanya individu yang bepergian antar dua wilayah dan model II dikonstruksi dengan adanya individu yang bepergian antar dua wilayah dan adanya kontrol pengobatan pada populasi *infected*, sehingga menghasilkan populasi baru yaitu populasi *treatment* yang didalamnya terdapat individu dalam masa pengobatan. Kedua model dianalisis tentang titik kesetimbangan, bilangan reproduksi dasar, syarat eksistensi dan kestabilan titik kesetimbangan, serta pengaruh perpindahan individu antarwilayah terhadap dinamika penyebaran penyakit dan kontrol optimal pengobatan yang dilakukan pada populasi *infected*. Kemudian analisis yang diperoleh diilustrasikan dengan simulasi numerik menggunakan *software* Matlab dengan tujuan untuk mengetahui pengaruh perpindahan individu antarwilayah bagi penyebaran penyakit dan efektivitas kontrol pengobatan yang telah dilakukan.

4.1 Model I

Model I adalah model tipe *SIRS* yang artinya di dalam suatu wilayah terdapat populasi *susceptible*, *infected*, dan *removed* dimana individu pada masing-masing populasi saling berinteraksi. Pengertian dari populasi *susceptible* adalah kelompok individu yang secara fisik dalam keadaan sehat tetapi mempunyai kemungkinan tertular penyakit, populasi *infected* adalah kelompok individu yang telah tertular penyakit dan dapat menularkan penyakitnya kepada individu lain, dan populasi *removed* adalah kelompok individu yang sembuh. Sehingga model tipe *SIRS* adalah individu yang terkena penyakit dapat sembuh namun kekebalan individu tersebut bersifat sementara dan dapat tertular penyakit kembali.

4.1.1 Konstruksi Model I

Model I dikonstruksi dengan adanya individu yang bepergian antar dua wilayah. Masing-masing wilayah terdapat tiga populasi, yaitu S_1 , I_1 , dan R_1

mewakili banyaknya individu pada populasi *susceptible*, *infected*, dan *removed* di wilayah pertama serta S_2 , I_2 , dan R_2 mewakili banyaknya individu pada populasi *susceptible*, *infected*, dan *removed* di wilayah kedua. Menurut fenomena yang ada, kondisi jasmani yang berbeda-beda pada setiap individu dan banyaknya aktivitas serta perubahan perilaku setiap individu menjadi alasan pembentukan model *SIRS* ini. Kedua wilayah diasumsikan identik, yaitu memiliki kesamaan parameter epidemiologi. Pengertian dari epidemiologi adalah ilmu yang mempelajari pola kesehatan dan penyebaran penyakit serta faktor yang terkait di tingkat populasi. Dengan kata lain tingkat penularan penyakit di wilayah satu sama dengan tingkat penularan penyakit di wilayah dua. Sehingga laju perubahan populasi *susceptible*, *infected*, dan *removed* di kedua wilayah adalah sebagai berikut.

Semua individu yang sehat serta individu yang baru lahir mempunyai kemungkinan terinfeksi dan disebut individu *susceptible*. Parameter a menyatakan banyaknya kelahiran alami di setiap wilayah. Selain kelahiran, perubahan populasi *susceptible* juga dipengaruhi oleh kematian alami bS_i yang akan mengakibatkan berkurangnya jumlah populasi. Ketika individu *susceptible* berinteraksi langsung dengan individu *infected* memungkinkan individu *susceptible* dapat terinfeksi sebesar proporsi individu *infected* yaitu $\frac{I_i}{N_i}$. Parameter β menyatakan tingkat penularan penyakit dalam wilayah yang terjadi melalui kontak langsung dengan individu *infected*, sehingga mengakibatkan berkurangnya individu di populasi *susceptible* sebesar $\beta S_i \frac{I_i}{N_i}$ pada waktu t . Kemudian menurunnya daya tahan tubuh individu *removed* menyebabkan individu tersebut menjadi rentan terhadap penyakit. Sehingga populasi *susceptible* mengalami pertambahan dari populasi *removed* yang individunya menjadi rentan yang dilambangkan dengan parameter $\alpha_2 R_i$. Dengan adanya perpindahan individu antar dua wilayah, maka terjadi perpindahan individu *susceptible* dari wilayah satu ke wilayah lain. Parameter $\alpha_1 S_i$ menyatakan banyaknya perpindahan individu antar dua wilayah tersebut.

Selain itu, akibat adanya individu *infected* yang bepergian, maka terjadi interaksi antara individu *susceptible* dengan individu *infected* pada saat perjalanan antar dua wilayah dan memungkinkan individu *susceptible* dapat terinfeksi sebesar

proporsi individu *infected* yaitu $\frac{I_i}{N_i}$. Parameter $\gamma\alpha_1$ menyatakan tingkat penularan penyakit pada saat perjalanan antar dua wilayah yang terjadi melalui kontak langsung dengan individu *infected*, sehingga mengakibatkan berkurangnya individu di populasi *susceptible* sebesar $\gamma\alpha_1 S_i \frac{I_i}{N_i}$ pada waktu t . Sehingga laju perubahan populasi *susceptible* per satuan waktu di kedua wilayah adalah ($i = 1,2$)

$$\begin{aligned}\frac{dS_1}{dt} &= a - bS_1 - \beta S_1 \frac{I_1}{N_1} + \alpha_1 S_2 - \gamma\alpha_1 S_2 \frac{I_2}{N_2} - \alpha_1 S_1 + \alpha_2 R_1, \\ \frac{dS_2}{dt} &= a - bS_2 - \beta S_2 \frac{I_2}{N_2} + \alpha_1 S_1 - \gamma\alpha_1 S_1 \frac{I_1}{N_1} - \alpha_1 S_2 + \alpha_2 R_2.\end{aligned}\quad (4.1)$$

Berkurangnya individu *susceptible* dikarenakan melakukan kontak langsung dengan individu *infected* menyebabkan bertambahnya individu di populasi *infected* sebesar $\beta S_i \frac{I_i}{N_i}$, selain itu kematian alami bI_i serta penyembuhan dI_i akan menyebabkan berkurangnya banyaknya individu pada populasi *infected*. Dengan adanya perpindahan individu antar dua wilayah, maka terjadi perpindahan individu *infected* dari wilayah satu ke wilayah lain. Parameter $\alpha_1 I_i$ menyatakan banyaknya perpindahan individu antar dua wilayah tersebut. Akibat adanya individu *infected* yang bepergian, maka terdapat parameter $\gamma\alpha_1$ yang menyatakan tingkat penularan pada saat perjalanan antar dua wilayah yang terjadi melalui kontak langsung antara individu *susceptible* dan individu *infected*, sehingga mengakibatkan bertambahnya individu *infected* di masing-masing wilayah sebesar $\gamma\alpha_1 S_i \frac{I_i}{N_i}$ pada waktu t . Sehingga laju perubahan populasi *infected* per satuan waktu di kedua wilayah adalah

$$\begin{aligned}\frac{dI_1}{dt} &= \beta S_1 \frac{I_1}{N_1} + \gamma\alpha_1 S_2 \frac{I_2}{N_2} - (b + \alpha_1 + d)I_1 + \alpha_1 I_2, \\ \frac{dI_2}{dt} &= \beta S_2 \frac{I_2}{N_2} + \gamma\alpha_1 S_1 \frac{I_1}{N_1} - (b + \alpha_1 + d)I_2 + \alpha_1 I_1.\end{aligned}\quad (4.2)$$

Banyaknya individu *infected* yang sembuh dI_i akan menyebabkan bertambahnya populasi *removed*. Selain penyembuhan, perubahan populasi *removed* dipengaruhi oleh kematian alami bR_i serta kembalinya individu yang telah sembuh menjadi rentan $\alpha_2 R_i$ yang akan mengakibatkan berkurangnya individu pada populasi. Dengan adanya perpindahan individu antar dua wilayah, maka

terjadi perpindahan individu *removed* dari wilayah satu ke wilayah lain. Parameter $\alpha_1 R_i$ menyatakan banyaknya perpindahan individu antar dua wilayah tersebut. Sehingga laju perubahan populasi *removed* per satuan waktu di kedua wilayah adalah

$$\begin{aligned}\frac{dR_1}{dt} &= dI_1 - (b + \alpha_1 + \alpha_2)R_1 + \alpha_1 R_2, \\ \frac{dR_2}{dt} &= dI_2 - (b + \alpha_1 + \alpha_2)R_2 + \alpha_1 R_1.\end{aligned}\quad (4.3)$$

Dari persamaan (4.1), (4.2), dan (4.3), diperoleh laju perubahan populasi *susceptible*, *infected*, dan *removed* di masing-masing wilayah. Laju perubahan populasi-populasi tersebut memenuhi sistem persamaan diferensial nonlinear sebagai berikut.

$$\begin{aligned}\frac{dS_1}{dt} &= a - bS_1 - \beta S_1 \frac{I_1}{N_1} + \alpha_1 S_2 - \gamma \alpha_1 S_2 \frac{I_2}{N_2} - \alpha_1 S_1 + \alpha_2 R_1, \\ \frac{dI_1}{dt} &= \beta S_1 \frac{I_1}{N_1} + \gamma \alpha_1 S_2 \frac{I_2}{N_2} - (b + \alpha_1 + d)I_1 + \alpha_1 I_2, \\ \frac{dR_1}{dt} &= dI_1 - (b + \alpha_1 + \alpha_2)R_1 + \alpha_1 R_2, \\ \frac{dS_2}{dt} &= a - bS_2 - \beta S_2 \frac{I_2}{N_2} + \alpha_1 S_1 - \gamma \alpha_1 S_1 \frac{I_1}{N_1} - \alpha_1 S_2 + \alpha_2 R_2, \\ \frac{dI_2}{dt} &= \beta S_2 \frac{I_2}{N_2} + \gamma \alpha_1 S_1 \frac{I_1}{N_1} - (b + \alpha_1 + d)I_2 + \alpha_1 I_1, \\ \frac{dR_2}{dt} &= dI_2 - (b + \alpha_1 + \alpha_2)R_2 + \alpha_1 R_1.\end{aligned}\quad (4.4)$$

dengan

S_i : banyaknya individu *susceptible* di wilayah i ($i=1,2$),

I_i : banyaknya individu *infected* di wilayah i ($i=1,2$),

R_i : banyaknya individu *removed* di wilayah i ($i=1,2$),

a : banyaknya kelahiran,

b : tingkat kematian alami,

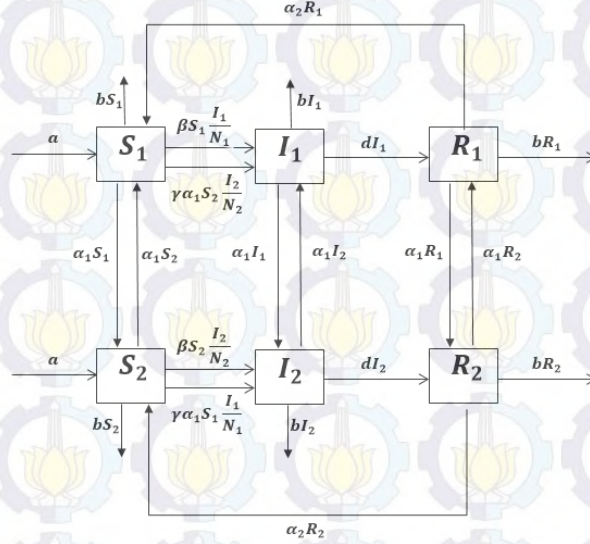
d : tingkat penyembuhan,

α_2 : tingkat individu *removed* yang kembali menjadi individu rentan,

α_1 : tingkat perpindahan individu antar dua wilayah,

β : tingkat penularan dalam satu wilayah,

$\gamma\alpha_1$: tingkat penularan pada saat perjalanan antar dua wilayah,



Gambar 4.1 Diagram kompartemen model I

Jika $N(t)$ adalah jumlah total populasi, maka $N(t) = S_1(t) + I_1(t) + R_1(t) + S_2(t) + I_2(t) + R_2(t)$ sehingga

$$\begin{aligned}
 \frac{dN}{dt} &= \frac{dS_1}{dt} + \frac{dI_1}{dt} + \frac{dR_1}{dt} + \frac{dS_2}{dt} + \frac{dI_2}{dt} + \frac{dR_2}{dt} \\
 &= a - bS_1 - \beta S_1 \frac{I_1}{N_1} - \alpha_1 S_1 + \alpha_1 S_2 - \gamma \alpha_1 S_2 \frac{I_1}{N_2} + \alpha_2 R_1 + \beta S_1 \frac{I_1}{N_1} \\
 &\quad + \gamma \alpha_1 S_2 \frac{I_2}{N_2} - (b + \alpha_1 + d)I_1 + \alpha_1 I_2 + dI_1 \\
 &\quad - (b + \alpha_1 + \alpha_2)R_1 + \alpha_1 R_2 + a - bS_2 - \beta S_2 \frac{I_2}{N_2} - \alpha_1 S_2 \\
 &\quad + \alpha_1 S_1 - \gamma \alpha_1 S_1 \frac{I_1}{N_1} + \alpha_2 R_2 + \beta S_2 \frac{I_2}{N_2} + \gamma \alpha_1 S_1 \frac{I_1}{N_1} \\
 &\quad - (b + \alpha_1 + d)I_2 + \alpha_1 I_1 + dI_2 - (b + \alpha_1 + \alpha_2)R_2 + \alpha_1 R_1 \\
 &= 2a - bS_1 - bI_1 - bR_1 - bS_2 - bI_2 - bR_2 \\
 &= 2a - b(S_1 + I_1 + R_1 + S_2 + I_2 + R_2) \\
 \frac{dN}{dt} &= 2a - bN
 \end{aligned}$$

Kemudian diselesaikan dengan menggunakan pemisahan variabel.

$$\Leftrightarrow \frac{dN}{2a - bN} = dt$$

$$\Leftrightarrow \int \frac{dN}{2a - bN} = \int dt$$

$$\text{Misalkan } v = 2a - bN \Leftrightarrow dv = -b dN$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{b} \int \frac{1}{v} dv = \int dt$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{b} \ln v = t + C$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{b} \ln v = -(t + C)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{b} v = e^{-(t+C)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2a - bN}{b} = \frac{1}{b} e^{-b(t+C)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2a}{b} - N = \frac{1}{b} e^{-b(t+C)}$$

$$\Leftrightarrow N(t) = \frac{2a}{b} - \frac{1}{b} e^{-b(t+C)}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} N(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{2a}{b} - \frac{1}{b} e^{-b(t+C)} \right)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} N(t) = \frac{2a}{b}$$

Karena $\lim_{t \rightarrow \infty} N(t) = \frac{2a}{b}$, maka $0 \leq N(t) \leq \frac{2a}{b}$.

Dari penyelesaian di atas, dapat disimpulkan bahwa model (4.4) memiliki penyelesaian terbatas dengan daerah penyelesaiannya adalah

$$\Omega = \left\{ (S_1, I_1, R_1, S_2, I_2, R_2) \mid S_1 \geq 0; I_1 \geq 0; R_1 \geq 0; S_2 \geq 0; I_2 \geq 0; R_2 \geq 0; S_1 + I_1 + R_1 + S_2 + I_2 + R_2 = N(t) \leq \frac{2a}{b} \right\}$$

4.1.2 Titik Kestimbangan pada Model I

Titik kesetimbangan sistem (4.4) dapat diperoleh jika $\frac{dS}{dt} = \frac{dI}{dt} = \frac{dR}{dt} = 0$.

Kemudian berdasarkan batasan masalah, kedua wilayah identik yaitu memiliki kesamaan parameter epidemiologi yang diantaranya adalah tingkat penularan

penyakit di wilayah satu sama dengan di wilayah dua. Sedemikian sehingga dapat dikatakan bahwa analisis titik kesetimbangan yang dilakukan di satu wilayah sudah mewakili untuk dua wilayah, sehingga sistem persamaan (4.4) menjadi

$$a - bS - \beta S \frac{I}{N} - \gamma \alpha_1 S \frac{I}{N} + \alpha_2 R = 0, \quad (4.5.a)$$

$$\beta S \frac{I}{N} + \gamma \alpha_1 S \frac{I}{N} - (b + d)I = 0, \quad (4.5.b)$$

$$dI - (b + \alpha_2)R = 0. \quad (4.5.c)$$

Berdasarkan persamaan (4.5.b) diperoleh,

$$\beta S \frac{I}{N} + \gamma \alpha_1 S \frac{I}{N} - (b + d)I = 0,$$

$$\left(\frac{\beta S}{N} + \frac{\gamma \alpha_1 S}{N} - b - d \right) I = 0,$$

Penyelesaian dari persamaan (4.5.b) adalah

$$I = 0,$$

atau

$$\left(\frac{\beta S}{N} + \frac{\gamma \alpha_1 S}{N} - b - d \right) = 0. \quad (4.6)$$

Untuk $I = 0$ disubstitusikan ke persamaan (4.5.c), sehingga diperoleh

$$-bR - \alpha_2 R = 0,$$

$$(-b - \alpha_2)R = 0,$$

$$R = 0.$$

Kemudian $I = 0$ dan $R = 0$ disubstitusikan ke persamaan (4.5.a) sehingga diperoleh

$$a - bS = 0,$$

$$bS = a,$$

$$S = \frac{a}{b}.$$

Dengan demikian diperoleh titik kesetimbangan bebas penyakit $E_a^0 =$

$$(S_1^0, I_1^0, R_1^0, S_2^0, I_2^0, R_2^0) = \left(\frac{a}{b}, 0, 0, \frac{a}{b}, 0, 0 \right).$$

Titik E_a^0 disebut titik kesetimbangan bebas penyakit karena $I_1^0, I_2^0 = 0$ yang berarti tidak terjadi penyebaran penyakit di dalam populasi karena tidak ada interaksi antara individu *susceptible* dengan individu *infected*.

Penentuan bilangan reproduksi dasar (\mathcal{R}_0) dari sistem persamaan (4.4) diawali dengan pembentukan matriks \mathcal{F} dan matriks \mathcal{V} . Matriks \mathcal{F} dan \mathcal{V} diambil dari sistem (4.4). Matriks \mathcal{F} adalah matriks yang komponennya merupakan laju dari munculnya infeksi baru yang masuk kompartemen i , sedangkan matriks \mathcal{V} adalah matriks yang komponennya merupakan laju dari transfer masuk (\mathcal{V}^+) atau keluar (\mathcal{V}^-) dari kompartemen i . Model penyebaran penyakit terdiri dari kondisi awal non negatif dengan persamaan sistem sebagai berikut.

$$\dot{x}_i = f_i(x) = \mathcal{F}_i(x) - \mathcal{V}_i(x), i = 1, \dots, n$$

dengan $\mathcal{V}_i = \mathcal{V}_i^- - \mathcal{V}_i^+$.

Diberikan $x = (S_1 \ I_1 \ R_1 \ S_2 \ I_2 \ R_2)^T$ dengan $S_1, I_1, R_1, S_2, I_2, R_2 \geq 0$

Misalkan diberikan X_s adalah himpunan dari semua titik kesetimbangan bebas penyakit

$$X_s = \{x \geq 0 \mid I_1, I_2 = 0\}$$

Fungsi \mathcal{F} , \mathcal{V}^+ dan \mathcal{V}^- harus memenuhi asumsi dasar sebagai berikut.

1. Jika $S_1, I_1, R_1, S_2, I_2, R_2 \geq 0$, maka $\mathcal{F}_i, \mathcal{V}_i^-, \mathcal{V}_i^+ \geq 0$

Artinya individu pada populasi *susceptible*, *infected*, dan *removed* ada dan apabila terjadi kontak dengan individu *infected* mengakibatkan terjadinya individu *infected* baru dan perubahan pada masing-masing populasi. Sehingga $\mathcal{F}_i, \mathcal{V}_i^-, \mathcal{V}_i^+$ dari model terpenuhi, yaitu sebagai berikut:

$$\beta S_1 \frac{I_1}{N_1} + \gamma \alpha_1 S_2 \frac{I_2}{N_2} \geq 0 \text{ dan } \beta S_2 \frac{I_2}{N_2} + \gamma \alpha_1 S_1 \frac{I_1}{N_1} \geq 0.$$

$$a, bS_1, \alpha_1 S_1, bS_2, \alpha_1 S_2 \geq 0 \text{ dan } bI_1, dI_1, \alpha_1 I_1, bI_2, dI_1, \alpha_1 I_2 \geq 0.$$

$$bR_1, \alpha_1 R_1, bR_2, \alpha_1 R_2 \geq 0.$$

2. Jika $I_1, I_2 = 0$ maka $\mathcal{V}_i^- = 0$. Secara khusus, jika $x \in X_s$, maka $\mathcal{V}_i^- = 0$

Artinya jika sebuah populasi *infected* kosong dikarenakan kematian alami atau infeksi, maka tidak ada individu yang keluar dari populasi tersebut.

$$bI_1, dI_1, \alpha_1 I_1, bI_2, dI_1, \alpha_1 I_2 = 0$$

3. $\mathcal{F}_i = 0$, jika $i > m$.

Artinya jika nilai dari $\mathcal{F}_i = 0$, maka populasi $I_1, I_2 = 0$. Dengan kata lain tidak terjadi munculnya infeksi baru yang diakibatkan oleh individu *infected*. Sehingga model mempunyai penyelesaian bebas penyakit.

4. Jika $x \in X_s$, maka $\mathcal{F}_i(x) = 0$ dan $\mathcal{V}_i^+ = 0$ untuk $i = 1, \dots, m$.

Artinya jika populasi bebas dari penyakit maka populasi akan tetap bebas dari penyakit (tidak ada perpindahan individu atau penularan infeksi).

$$I_1, I_2 = 0$$

5. Didefinisikan DFE dari f adalah penyelesaian kestabilan lokal dari titik kesetimbangan bebas penyakit, dengan f terbatas ke X_s . Jika populasi ada disekitar DFE, maka populasi akan kembali ke DFE menurut linearisasi sistem:

$$\dot{x} = Df(x_0)(x - x_0), \text{ dengan } Df(x_0) = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$$

Dari sistem (4.4) didapatkan matriks \mathcal{F} dan \mathcal{V} sebagai berikut,

$$\mathcal{F} = \begin{pmatrix} 0 & \beta S_1 \frac{I_1}{N_1} + \gamma \alpha_1 S_2 \frac{I_2}{N_2} \\ 0 & 0 \\ \beta S_2 \frac{I_2}{N_2} + \gamma \alpha_1 S_1 \frac{I_1}{N_1} & 0 \end{pmatrix} \text{ dan } \mathcal{V} = \begin{pmatrix} (b + \alpha_1)S_1 - a - \alpha_2 R_1 & (b + \alpha_1 + d)I_1 - \alpha_1 I_2 \\ (b + \alpha_1 + \alpha_2)R_1 - dI_1 - \alpha_1 R_2 & (b + \alpha_1)S_2 - a - \alpha_2 R_2 \\ (b + \alpha_1 + d)I_2 - \alpha_1 I_1 & (b + \alpha_1 + \alpha_2)R_2 - dI_2 - \alpha_1 R_1 \end{pmatrix}$$

Kemudian diketahui populasi yang terinfeksi adalah I_1 dan I_2 , maka didapatkan $m = 2$. Kemudian dengan menggunakan Lemma 2.2 diperoleh

$$F = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathcal{F}_1(E_a^0)}{\partial I_1} & \frac{\partial \mathcal{F}_1(E_a^0)}{\partial I_2} \\ \frac{\partial \mathcal{F}_2(E_a^0)}{\partial I_1} & \frac{\partial \mathcal{F}_2(E_a^0)}{\partial I_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta & \gamma \alpha_1 \\ \gamma \alpha_1 & \beta \end{pmatrix},$$

dan

$$V = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathcal{V}_1(E_a^0)}{\partial I_1} & \frac{\partial \mathcal{V}_1(E_a^0)}{\partial I_2} \\ \frac{\partial \mathcal{V}_2(E_a^0)}{\partial I_1} & \frac{\partial \mathcal{V}_2(E_a^0)}{\partial I_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (b + \alpha_1 + d) & -\alpha_1 \\ -\alpha_1 & (b + \alpha_1 + d) \end{pmatrix}.$$

Menurut Definisi 2.1, matriks V merupakan M-matriks non singular jika dan hanya jika terdapat bilangan k dan matriks P sedemikian sehingga terdapat $k > \rho(P)$ yang memenuhi $V = kI - P$. Kemudian akan dibuktikan bahwa V merupakan M-matriks non singular.

$$V = k \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & \alpha_1 \\ \alpha_1 & 0 \end{pmatrix} \text{ dengan } k = b + d + \alpha_1$$

Diperoleh $\rho(P) = \alpha_1$, sehingga $k = b + d + \alpha_1 > \rho(P)$

Jadi terbukti bahwa matriks V merupakan M-matriks non singular.

kemudian dibentuk matriks generasi selanjutnya, yaitu

$$FV^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\beta B_1 + \gamma \alpha_1^2}{C_1} & \frac{\beta \alpha_1 + \gamma \alpha_1 B_1}{C_1} \\ \frac{\beta \alpha_1 + \gamma \alpha_1 B_1}{C_1} & \frac{\beta B_1 + \gamma \alpha_1^2}{C_1} \end{pmatrix}$$

dengan

$$B_1 = b + d + \alpha_1$$

$$C_1 = (b + d)(b + d + 2\alpha_1)$$

Kemudian mencari nilai eigen dari matriks FV^{-1} , yaitu

$$|FV^{-1} - \lambda I| = 0$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\beta B_1 + \gamma \alpha_1^2}{C_1} - \lambda & \frac{\beta \alpha_1 + \gamma \alpha_1 B_1}{C_1} \\ \frac{\beta \alpha_1 + \gamma \alpha_1 B_1}{C_1} & \frac{\beta B_1 + \gamma \alpha_1^2}{C_1} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Dimisalkan

$$\frac{\beta B_1 + \gamma \alpha_1^2}{C_1} = D_1$$

$$\frac{\beta \alpha_1 + \gamma \alpha_1 B_1}{C_1} = E_1$$

Sehingga diperoleh

$$\begin{vmatrix} D_1 - \lambda & E_1 \\ E_1 & D_1 - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

$$(D_1 - \lambda)^2 - E_1^2 = 0,$$

$$((D_1 - \lambda) - E_1)((D_1 - \lambda) + E_1) = 0,$$

$$\lambda_1 = D_1 - E_1$$

$$\lambda_2 = D_1 + E_1$$

Bilangan reproduksi dasar adalah *spectral radius* dari operator generasi selanjutnya, yaitu

$$\mathcal{R}_0 = \rho(FV^{-1})$$

$$= \max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|\}$$

$$= \max\{|D_1 - E_1|, |D_1 + E_1|\}$$

$$\begin{aligned}
&= D_1 + E_1 \\
&= \frac{\beta B_1 + \gamma \alpha_1^2}{C_1} + \frac{\beta \alpha_1 + \gamma \alpha_1 B_1}{C_1} \\
&= \frac{B_1(\beta + \gamma \alpha_1) + \alpha_1(\beta + \gamma \alpha_1)}{C_1} \\
&= \frac{(B_1 + \alpha_1)(\beta + \gamma \alpha_1)}{C} \\
\mathcal{R}_0 &= \frac{(b + d + 2\alpha_1)(\beta + \gamma \alpha_1)}{(b + d)(b + d + 2\alpha_1)} = \frac{\beta + \gamma \alpha_1}{b + d}.
\end{aligned}$$

Dari angka reproduksi dasar diperoleh

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_0 &= \frac{\beta + \gamma \alpha_1}{b + d}, \\
b + d &= \frac{\beta + \gamma \alpha_1}{\mathcal{R}_0}.
\end{aligned} \tag{4.7}$$

Kemudian persamaan (4.7) disubstitusikan ke persamaan (4.6)

$$\begin{aligned}
\frac{\beta S}{N} + \frac{\gamma \alpha_1 S}{N} - \frac{\beta + \gamma \alpha_1}{\mathcal{R}_0} &= 0, \\
\frac{(\beta + \gamma \alpha_1)S}{N} &= \frac{\beta + \gamma \alpha_1}{\mathcal{R}_0}, \\
\frac{\mathcal{R}_0 S}{N} &= \frac{\beta + \gamma \alpha_1}{\beta + \gamma \alpha_1}, \\
\frac{\mathcal{R}_0 S}{N} &= 1, \\
\mathcal{R}_0 S &= S + I + R, \\
(\mathcal{R}_0 - 1)S &= I + R, \\
S &= \frac{I + R}{\mathcal{R}_0 - 1}.
\end{aligned} \tag{4.8}$$

Dari persamaan (4.5.b) diperoleh

$$\begin{aligned}
\frac{\beta SI}{N} + \frac{\gamma \alpha_1 SI}{N} - (b + d)I &= 0, \\
\frac{\beta SI}{N} + \frac{\gamma \alpha_1 SI}{N} &= (b + d)I.
\end{aligned} \tag{4.9}$$

Persamaan (4.9) disubstitusikan ke persamaan (4.5.a)

$$a - (b + d)I - bS + \alpha_2 R = 0,$$

Karena dari persamaan (4.5.c) diketahui

$$\begin{aligned} dI - bR - \alpha_2 R &= 0, \\ dI &= (b + \alpha_2)R, \\ I &= \frac{(b + \alpha_2)R}{d}. \end{aligned} \quad (4.10)$$

maka

$$\begin{aligned} a - \frac{(b + d)(b + \alpha_2)R}{d} - bS + \alpha_2 R &= 0, \\ (b + d)(b + \alpha_2)R &= d(a - bS + \alpha_2 R), \\ (b^2 + b\alpha_2 + db + d\alpha_2)R &= d(a - bS + \alpha_2 R), \\ (b^2 + b\alpha_2 + db)R &= d(a - bS), \\ R &= \frac{d(a - bS)}{b(b + \alpha_2 + d)}. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Persamaan (4.11) disubstitusikan ke persamaan (4.10)

$$\begin{aligned} I &= \frac{d(b + \alpha_2)(a - bS)}{db(b + \alpha_2 + d)}, \\ I &= \frac{(b + \alpha_2)(a - bS)}{b(b + \alpha_2 + d)}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Kemudian substitusikan persamaan (4.12) dan (4.11) ke persamaan (4.8)

$$\begin{aligned} S &= \frac{I + R}{\mathcal{R}_0 - 1}, \\ S &= \frac{\frac{(b + \alpha_2)(a - bS)}{b(b + \alpha_2 + d)} + \frac{d(a - bS)}{b(b + \alpha_2 + d)}}{\mathcal{R}_0 - 1}, \\ S(\mathcal{R}_0 - 1) &= \frac{(b + \alpha_2)(a - bS) + d(a - bS)}{b(b + \alpha_2 + d)}, \\ S(\mathcal{R}_0 - 1)b(b + \alpha_2 + d) &= (b + \alpha_2 + d)(a - bS), \\ S(\mathcal{R}_0 - 1)b &= a - bS, \\ \mathcal{R}_0 bS - bS + bS &= a, \\ \mathcal{R}_0 bS &= a, \\ S &= \frac{a}{b\mathcal{R}_0}. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Kemudian persamaan (4.13) disubstitusikan ke persamaan (4.11) dan (4.12), sehingga diperoleh

$$R = \frac{d \left(a - b \frac{a}{b\mathcal{R}_0} \right)}{b(b + \alpha_2 + d)},$$

$$R = \frac{d \left(a - \frac{a}{\mathcal{R}_0} \right)}{b(b + \alpha_2 + d)},$$

$$R = \frac{ad}{b(b + \alpha_2 + d)} \left(1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0} \right). \quad (4.14)$$

dan

$$I = \frac{(b + \alpha_2) \left(a - b \frac{a}{b\mathcal{R}_0} \right)}{b(b + \alpha_2 + d)},$$

$$I = \frac{(b + \alpha_2) \left(a - \frac{a}{\mathcal{R}_0} \right)}{b(b + \alpha_2 + d)},$$

$$I = \frac{a(b + \alpha_2)}{b(b + \alpha_2 + d)} \left(1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0} \right). \quad (4.15)$$

Persamaan (4.13), (4.14), dan (4.15) merupakan titik kesetimbangan endemik $E_a^+ = (S_1^+, I_1^+, R_1^+, S_2^+, I_2^+, R_2^+)$ dimana $(i = 1, 2)$

$$S_i^+ = \frac{a}{b\mathcal{R}_0},$$

$$I_i^+ = \frac{a(b + \alpha_2)}{b(b + \alpha_2 + d)} \left(1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0} \right),$$

$$R_i^+ = \frac{ad}{b(b + \alpha_2 + d)} \left(1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0} \right).$$

4.1.3 Kestabilan Titik Kesetimbangan pada Model I

Sebelum menentukan kestabilan titik kesetimbangan, terlebih dahulu dilakukan perhitungan matriks Jacobi dari sistem (4.4). Matriks Jacobi dari sistem (4.4) adalah

$$J = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ B_1 & A_1 \end{pmatrix}$$

dengan titik kesetimbangan $(S_1, I_1, R_1, S_2, I_2, R_2)$ dan

$$A_1 = \begin{pmatrix} -(b + \alpha_1) - \frac{\beta I(I + R)}{N^2} & -\frac{\beta S(S + R)}{N^2} & \frac{\beta SI}{N^2} + \alpha_2 \\ \frac{\beta I(I + R)}{N^2} & \frac{\beta S(S + R)}{N^2} - (b + d + \alpha_1) & -\frac{\beta SI}{N^2} \\ 0 & d & -(b + \alpha_1 + \alpha_2) \end{pmatrix}$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} -\frac{\gamma \alpha_1 I(I + R)}{N^2} + \alpha_1 & -\frac{\gamma \alpha_1 S(S + R)}{N^2} & \frac{\gamma \alpha_1 SI}{N^2} \\ \frac{\gamma \alpha_1 I(I + R)}{N^2} & \frac{\gamma \alpha_1 S(S + R)}{N^2} + \alpha_1 & -\frac{\gamma \alpha_1 SI}{N^2} \\ 0 & 0 & \alpha_1 \end{pmatrix}$$

Titik kesetimbangan bebas penyakit $E_a^0 = (\frac{a}{b}, 0, 0, \frac{a}{b}, 0, 0)$ disubstitusikan ke dalam matriks Jacobi, sehingga diperoleh

$$J(E_a^0) = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ B_1 & A_1 \end{pmatrix}$$

dengan

$$A_1 = \begin{pmatrix} -b - \alpha_1 & -\beta & \alpha_2 \\ 0 & \beta - (b + d + \alpha_1) & 0 \\ 0 & d & -(b + \alpha_1 + \alpha_2) \end{pmatrix}$$

dan

$$B_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1 & -\gamma \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_1(1 + \gamma) & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_1 \end{pmatrix}$$

Kemudian untuk mencari persamaan karakteristik, didapatkan

$$\begin{aligned} \det(J(E_a^0) - \lambda I) &= \det \begin{pmatrix} A_1 - \lambda & B_1 \\ B_1 & A_1 - \lambda \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} A_1 + B_1 - \lambda & B_1 \\ A_1 + B_1 - \lambda & A_1 - \lambda \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} A_1 + B_1 - \lambda & B_1 \\ 0 & A_1 - B_1 - \lambda \end{pmatrix} \\ &= \det(A_1 + B_1 - \lambda) \det(A_1 - B_1 - \lambda) \end{aligned}$$

Nilai eigen dari $J(E_a^0)$ dapat diketahui dengan mencari nilai eigen dari $A_1 + B_1$ dan $A_1 - B_1$.

$$A_1 + B_1 = \begin{pmatrix} -b & -\beta - \gamma \alpha_1 & \alpha_2 \\ 0 & \beta - (b + d) + \gamma \alpha_1 & 0 \\ 0 & d & -(b + \alpha_2) \end{pmatrix}$$

$$|A_1 + B_1 - \lambda I| = \begin{vmatrix} -b - \lambda & -\beta - \gamma\alpha_1 & \alpha_2 \\ 0 & \beta - (b + d) + \gamma\alpha_1 - \lambda & 0 \\ 0 & d & -(b + \alpha_2) - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(-b - \lambda)(\beta - (b + d) + \gamma\alpha_1 - \lambda)(-(b + \alpha_2) - \lambda) = 0$$

Nilai eigen yang didapat adalah

$$\lambda_1 = -b, \lambda_2 = \beta - (b + d) + \gamma\alpha_1, \text{ dan } \lambda_3 = -(b + \alpha_2)$$

Kemudian dengan mensubstitusikan persamaan (4.7), maka λ_2 dapat ditulis kembali sebagai $\lambda_2 = (\beta + \gamma\alpha_1) \left(1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0}\right)$. Semua nilai eigen matriks $A_1 + B_1$ bernilai negatif jika $\mathcal{R}_0 < 1$ dan bernilai $\lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0$, dan $\lambda_3 < 0$ jika $\mathcal{R}_0 > 1$.

Selanjutnya,

$$A_1 - B_1 = \begin{pmatrix} -(b + 2\alpha_1) & -\beta + \gamma\alpha_1 & \alpha_2 \\ 0 & \beta - (b + d) - \alpha_1(2 + \gamma) & 0 \\ 0 & d & -(b + 2\alpha_1 + \alpha_2) \end{pmatrix}$$

$$|A_1 - B_1 - \lambda I| = \begin{vmatrix} -(b + 2\alpha_1) - \lambda & -\beta + \gamma\alpha_1 & \alpha_2 \\ 0 & \beta - (b + d) - \alpha_1(2 + \gamma) - \lambda & 0 \\ 0 & d & -(b + 2\alpha_1 + \alpha_2) - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(-(b + 2\alpha_1) - \lambda)(\beta - (b + d) - \alpha_1(2 + \gamma) - \lambda)(-(b + 2\alpha_1 + \alpha_2) - \lambda) = 0$$

Nilai eigen yang didapat adalah

$$\lambda_4 = -(b + 2\alpha_1), \lambda_5 = \beta - (b + d) - \alpha_1(2 + \gamma), \text{ dan}$$

$$\lambda_6 = -(b + 2\alpha_1 + \alpha_2)$$

Berdasarkan ketiga nilai eigen yang telah didapatkan, maka semua nilai eigen matriks $A_1 - B_1$ bernilai negatif jika $\mathcal{R}_0 < 1$.

Dari semua nilai eigen yang telah diperoleh, untuk titik kesetimbangan bebas penyakit dapat disimpulkan jika $\mathcal{R}_0 < 1$ maka bersifat stabil asimtotik dan jika $\mathcal{R}_0 > 1$ maka bersifat tidak stabil.

Titik kesetimbangan endemi $E_a^+ = (S_1^+, I_1^+, R_1^+, S_2^+, I_2^+, R_2^+)$ disubstitusikan ke dalam matriks Jacobi, sehingga diperoleh

$$J(E_a^+) = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ B_1 & A_1 \end{pmatrix}$$

Dengan

$$A_1 = \begin{pmatrix} -(b + \alpha_1) - \beta \left(1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0}\right)^2 k & -\beta \left(\frac{1}{\mathcal{R}_0} - \frac{1}{\mathcal{R}_0} \left(1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0}\right) k\right) & \beta \frac{1}{\mathcal{R}_0} \left(1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0}\right) k + \alpha_2 \\ \beta \left(1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0}\right)^2 k & \beta \left(\frac{1}{\mathcal{R}_0} - \frac{1}{\mathcal{R}_0} \left(1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0}\right) k\right) - (b + d + \alpha_1) & -\beta \frac{1}{\mathcal{R}_0} \left(1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0}\right) k \\ 0 & d & -(b + \alpha_2 + \alpha_1) \end{pmatrix}$$

dan

$$B_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1 - \gamma \alpha_1 \left(1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0}\right)^2 k & -\gamma \alpha_1 \left(\frac{1}{\mathcal{R}_0} - \frac{1}{\mathcal{R}_0} \left(1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0}\right) k\right) & \gamma \alpha_1 \frac{1}{\mathcal{R}_0} \left(1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0}\right) k \\ \gamma \alpha_1 \left(1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0}\right)^2 k & \gamma \alpha_1 \left(\frac{1}{\mathcal{R}_0} - \frac{1}{\mathcal{R}_0} \left(1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0}\right) k\right) + \alpha_1 & -\gamma \alpha_1 \frac{1}{\mathcal{R}_0} \left(1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0}\right) k \\ 0 & 0 & \alpha_1 \end{pmatrix}$$

dengan $k = \frac{b + \alpha_2}{b + \alpha_2 + d}$.

Menggunakan cara yang sama, nilai eigen dari $J(E_a^+)$ dapat diketahui dengan menganalisis nilai eigen dari $A_1 + B_1$ dan $A_1 - B_1$.

$$A_1 + B_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad \text{dan} \quad A_1 - B_1 = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ 0 & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

Diketahui elemen dari $A_1 + B_1$ adalah

$$a_{11} = -(\beta + \gamma \alpha_1) \left(1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0}\right)^2 k - b$$

$$a_{12} = -(\beta + \gamma \alpha_1) \left(\frac{1}{\mathcal{R}_0} - \frac{1}{\mathcal{R}_0} \left(1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0}\right) k\right)$$

$$a_{13} = (\beta + \gamma \alpha_1) \frac{1}{\mathcal{R}_0} \left(1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0}\right) k + \alpha_2$$

$$a_{21} = (\beta + \gamma \alpha_1) \left(1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0}\right)^2 k$$

$$a_{22} = (\beta + \gamma \alpha_1) \left(\frac{1}{\mathcal{R}_0} - \frac{1}{\mathcal{R}_0} \left(1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0}\right) k\right) - (b + d)$$

$$a_{23} = -(\beta + \gamma \alpha_1) \frac{1}{\mathcal{R}_0} \left(1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0}\right) k$$

$$a_{32} = d$$

$$a_{33} = -(b + \alpha_2)$$

dan elemen dari $A_1 - B_1$ adalah

$$b_{11} = -(\beta - \gamma\alpha_1) \left(1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0}\right)^2 k - (b + 2\alpha_1)$$

$$b_{12} = -(\beta - \gamma\alpha_1) \left(\frac{1}{\mathcal{R}_0} - \frac{1}{\mathcal{R}_0} \left(1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0}\right) k\right)$$

$$b_{13} = (\beta - \gamma\alpha_1) \frac{1}{\mathcal{R}_0} \left(1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0}\right) k + \alpha_2$$

$$b_{21} = (\beta - \gamma\alpha_1) \left(1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0}\right)^2 k$$

$$b_{22} = (\beta - \gamma\alpha_1) \left(\frac{1}{\mathcal{R}_0} - \frac{1}{\mathcal{R}_0} \left(1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0}\right) k\right) - (b + d + 2\alpha_1)$$

$$b_{23} = -(\beta - \gamma\alpha_1) \frac{1}{\mathcal{R}_0} \left(1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0}\right) k$$

$$b_{32} = d$$

$$b_{33} = -(b + \alpha_2 + 2\alpha_1)$$

Dengan menambahkan baris 1 ke baris 2, dan 3, kemudian menambahkan kolom 2, dan 3 ke kolom 1 yang dikalikan (-1) sehingga $A_1 + B_1$ dan $A_1 - B_1$ menjadi

$$A_1 + B_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad \text{dan} \quad A_1 - B_1 = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ 0 & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

Diketahui elemen dari $A_1 + B_1$ adalah

$$a_{11} = -b$$

$$a_{21} = (\beta + \gamma\alpha_1) \left(1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0}\right)^2 k$$

$$a_{22} = (\beta + \gamma\alpha_1) \left(\frac{1}{\mathcal{R}_0} - \left(1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0}\right) k\right) - (b + d)$$

$$a_{23} = -(\beta + \gamma\alpha_1) \left(1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0}\right) k$$

$$a_{32} = d$$

$$a_{33} = -(b + \alpha_2)$$

dan elemen dari $A_1 - B_1$ adalah

$$b_{11} = -(b + 2\alpha_1)$$

$$b_{21} = (\beta - \gamma\alpha_1) \left(1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0}\right)^2 k$$

$$b_{22} = (\beta - \gamma\alpha_1) \left(\frac{1}{\mathcal{R}_0} - \left(1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0} \right) k \right) - (b + d + 2\alpha_1)$$

$$b_{23} = -(\beta - \gamma\alpha_1) \left(1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0} \right) k$$

$$b_{32} = d$$

$$b_{33} = -(b + \alpha_2 + 2\alpha_1)$$

Dengan menggunakan ekspansi kofaktor maka didapatkan,

$$A_1 + B_1 = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad \text{dan} \quad A_1 - B_1 = b_{11} \begin{vmatrix} b_{22} & b_{23} \\ b_{32} & b_{33} \end{vmatrix}$$

Diketahui bahwa nilai eigen dari a_{11} dan b_{11} bernilai negatif.

Untuk menunjukkan bahwa $A_1 + B_1$ dan $A_1 - B_1$ memiliki nilai-nilai eigen negatif ketika $\mathcal{R}_0 > 1$ dapat menggunakan Kriteria Routh-Hurwitz sebagai berikut.

$$P = \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Persamaan karakteristik matriks P adalah

$$\lambda^2 + P_1\lambda + P_2 = 0$$

dengan $P_1 = -(a_{22} + a_{32})$ dan $P_2 = a_{22}a_{32} - a_{23}a_{32}$.

Persamaan karakteristik matriks P akan mempunyai nilai eigen negatif jika dan hanya jika memenuhi kondisi

$$(i) \quad P_1 > 0$$

$$(ii) \quad P_2 > 0$$

Pembuktian untuk $A_1 + B_1$ adalah sebagai berikut.

(i) Untuk membuktikan $P_1 > 0$, maka harus dibuktikan bahwa $a_{22} + a_{33} < 0$.

$$\begin{aligned} a_{22} &= (\beta + \gamma\alpha_1) \left(\frac{1}{\mathcal{R}_0} - \left(1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0} \right) k \right) - (b + d) \\ &= (\beta + \gamma\alpha_1) \left(\frac{b + d}{\beta + \gamma\alpha_1} - \left(1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0} \right) k \right) - (b + d) \\ &= (\beta + \gamma\alpha_1) \left(- \left(1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0} \right) k \right) < 0 \end{aligned}$$

$$a_{33} = -(b + \alpha_2) < 0$$

Karena $\mathcal{R}_0 > 1$ maka terbukti $P_1 > 0$.

(ii) Untuk membuktikan $P_2 > 0$, maka harus dibuktikan bahwa $a_{22}a_{33} > 0$ dan

$$a_{23}a_{32} < 0.$$

- a. Diketahui $a_{22} < 0$ dan $a_{33} < 0$, sehingga $a_{22}a_{33} > 0$.
- b. Jika $\mathcal{R}_0 > 1$, maka $a_{23} = -(\beta + \gamma\alpha_1)\left(1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0}\right)k < 0$ dan $a_{32} = d > 0$.

Sehingga $a_{23}a_{32} < 0$.

Dari (i) dan (ii) dapat dikatakan bahwa semua nilai eigen dari matriks $A_1 + B_1$ adalah negatif jika $\mathcal{R}_0 > 1$.

Pembuktian untuk $A_1 - B_1$ adalah sebagai berikut.

(i') Untuk membuktikan $P_1 > 0$, maka harus dibuktikan bahwa $b_{22} + b_{33} < 0$.

$$\begin{aligned}
 b_{22} &= (\beta - \gamma\alpha_1)\left(\frac{1}{\mathcal{R}_0} - \left(1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0}\right)k\right) - (b + d + 2\alpha_1) \\
 &= (\beta - \gamma\alpha_1)\frac{1}{\mathcal{R}_0} - (\beta - \gamma\alpha_1)\left(1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0}\right)k - (b + d + 2\alpha_1) \\
 &= (\beta - \gamma\alpha_1)\frac{b + d}{\beta + \gamma\alpha_1} - (b + d) - (\beta - \gamma\alpha_1)\left(1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0}\right)k - 2\alpha_1 \\
 &= (b + d)\left(\frac{\beta - \gamma\alpha_1}{\beta + \gamma\alpha_1} - 1\right) - (\beta - \gamma\alpha_1)\left(1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0}\right)k - 2\alpha_1 < 0
 \end{aligned}$$

$$b_{33} = -(b + \alpha_2 + 2\alpha_1) < 0.$$

Karena $\mathcal{R}_0 > 1$ maka terbukti $P_1 > 0$.

(ii') Untuk membuktikan $P_2 > 0$, maka harus dibuktikan bahwa $b_{22}b_{33} > 0$ dan $b_{23}b_{32} < 0$.

- c. Diketahui $b_{22} < 0$ dan $b_{33} < 0$, sehingga $b_{22}b_{33} > 0$.
- d. Jika $\mathcal{R}_0 > 1$, maka $b_{23} = -(\beta - \gamma\alpha_1)\left(1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0}\right)k < 0$ dan $b_{32} = d > 0$.

Sehingga $a_{23}a_{32} < 0$.

Dari (i') dan (ii') dapat dikatakan bahwa semua nilai eigen dari matriks $A_1 - B_1$ adalah negatif jika $\mathcal{R}_0 > 1$.

Dari semua nilai eigen yang telah diperoleh $A_1 + B_1$ dan $A_1 - B_1$, untuk titik kesetimbangan endemi dapat disimpulkan jika $\mathcal{R}_0 > 1$ maka bersifat stabil asimtotik.

Dari uraian model I di atas dapat diperoleh kesimpulan sebagai berikut.

Syarat eksistensi titik kesetimbangan berdasarkan bilangan reproduksi dasar adalah ketika $\mathcal{R}_0 < 1$ sistem (4.4) hanya ada satu titik kesetimbangan yang eksis, yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit dan memiliki sifat stabil asimtotik,

sedangkan ketika $\mathcal{R}_0 > 1$ sistem (4.4) tedapat dua titik kesetimbangan yang eksis, yaitu titik kesetimbangan endemi bersifat stabil asimtotik dan titik kesetimbangan bebas penyakit bersifat tidak stabil.

4.2 Model II

Model II adalah model tipe *SITRS* yang artinya di dalam suatu wilayah terdapat populasi *susceptible*, *infected*, *treatment*, dan *removed* dimana individu pada masing-masing populasi saling berinteraksi. Menurut fenomena yang terjadi, individu yang terinfeksi dapat disembuhkan dengan cara pemberian pengobatan. Individu yang dalam masa pengobatan di kelompokkan pada populasi *treatment*. Sehingga model tipe *SITRS* adalah adanya kontrol pengobatan yang dilakukan kepada individu yang terkena penyakit kemudian individu dapat sembuh namun kekebalan individu tersebut bersifat sementara dan dapat tertular penyakit kembali.

4.2.1 Konstruksi Model II

Model II dikonstruksi dari model tipe *SITRS* dengan adanya individu yang bepergian antar dua wilayah dan dilakukannya proses pengobatan pada populasi *infected*. Masing-masing wilayah terdapat empat populasi, yaitu S_1 , I_1 , T_1 dan R_1 mewakili banyaknya individu pada populasi *susceptible*, *infected*, *treatment* dan *removed* di wilayah pertama serta S_2 , I_2 , T_2 dan R_2 mewakili banyaknya individu pada populasi *susceptible*, *infected*, *treatment* dan *removed* di wilayah kedua. Menurut fenomena yang ada, kondisi jasmani yang berbeda-beda pada setiap individu dan banyaknya aktivitas serta perubahan perilaku setiap individu menjadi alasan pembentukan model *SITRS* ini. Kedua wilayah diasumsikan identik, sehingga laju perubahan populasi *susceptible*, *infected*, *treatment* dan *removed* di kedua wilayah adalah sebagai berikut.

Laju perubahan populasi *susceptible* pada model II sama dengan laju perubahan populasi *susceptible* pada model I, yaitu

$$\begin{aligned}\frac{dS_1}{dt} &= a - bS_1 - \beta S_1 \frac{I_1}{N_1} + \alpha_1 S_2 - \gamma \alpha_1 S_2 \frac{I_2}{N_2} - \alpha_1 S_1 + \alpha_2 R_1, \\ \frac{dS_2}{dt} &= a - bS_2 - \beta S_2 \frac{I_2}{N_2} + \alpha_1 S_1 - \gamma \alpha_1 S_1 \frac{I_1}{N_1} - \alpha_1 S_2 + \alpha_2 R_2.\end{aligned}\tag{4.16}$$

Laju perubahan populasi *infected* pada model II memiliki kasus yang hampir sama dengan model I akan tetapi, adanya pengobatan uI_i yang dilakukan pada individu *infected* mengakibatkan berkurangnya jumlah individu pada populasi *infected*. Sehingga laju perubahan populasi *infected* per satuan waktu di kedua wilayah adalah

$$\begin{aligned}\frac{dI_1}{dt} &= \beta S_1 \frac{I_1}{N_1} + \gamma \alpha_1 S_2 \frac{I_2}{N_2} - (b + \alpha_1 + u)I_1 + \alpha_1 I_2, \\ \frac{dI_2}{dt} &= \beta S_2 \frac{I_2}{N_2} + \gamma \alpha_1 S_1 \frac{I_1}{N_1} - (b + \alpha_1 + u)I_2 + \alpha_1 I_1.\end{aligned}\quad (4.17)$$

Banyaknya individu yang telah diberikan pengobatan uI_i akan menyebabkan bertambahnya populasi *treatment*. Selain pengobatan perubahan populasi *treatment* juga dipengaruhi oleh kematian alami bT_i serta penyembuhan setelah dilakukannya pengobatan dT_i yang akan mengakibatkan berkurangnya jumlah populasi. Dengan adanya perpindahan individu antar dua wilayah, maka terjadi perpindahan individu *treatment* dari wilayah satu ke wilayah lain. Parameter $\alpha_1 T_i$ menyatakan banyaknya perpindahan individu antar dua wilayah tersebut. Sehingga laju perubahan populasi *treatment* per satuan waktu di kedua wilayah adalah

$$\begin{aligned}\frac{dT_1}{dt} &= uI_1 - (b + d + \alpha_1)T_1 + \alpha_1 T_2, \\ \frac{dT_2}{dt} &= uI_2 - (b + d + \alpha_1)T_2 + \alpha_1 T_1.\end{aligned}\quad (4.18)$$

Individu *treatment* yang sembuh setelah mengalami pengobatan dengan tingkat penyembuhan dT_i akan menyebabkan bertambahnya populasi *removed*. Selain laju penyembuhan, perubahan populasi *removed* dipengaruhi oleh kematian alami bT_i serta kembalinya individu yang telah sembuh menjadi rentan $\alpha_2 R_i$ yang akan mengakibatkan berkurangnya jumlah populasi. Dengan adanya perpindahan individu antar dua wilayah, maka terjadi perpindahan individu *removed* dari wilayah satu ke wilayah lain. Parameter $\alpha_1 R_i$ menyatakan banyaknya perpindahan individu antar dua wilayah tersebut. Sehingga laju perubahan populasi *removed* per satuan waktu di kedua wilayah adalah

$$\frac{dR_1}{dt} = dT_1 - (b + \alpha_1 + \alpha_2)R_1 + \alpha_1 R_2, \quad (4.19)$$

$$\frac{dR_2}{dt} = dT_2 - (b + \alpha_1 + \alpha_2)R_2 + \alpha_1 R_1.$$

Dari persamaan (4.16), (4.17), (4.18), dan (4.19), diperoleh laju perubahan populasi *susceptible*, *infected*, *treatment*, dan *removed* di masing-masing wilayah. Laju perubahan populasi-populasi tersebut memenuhi sistem persamaan diferensial nonlinear sebagai berikut.

$$\begin{aligned}\frac{dS_1}{dt} &= a - bS_1 - \beta S_1 \frac{I_1}{N_1} + \alpha_1 S_2 - \gamma \alpha_1 S_2 \frac{I_2}{N_2} - \alpha_1 S_1 + \alpha_2 R_1, \\ \frac{dI_1}{dt} &= \beta S_1 \frac{I_1}{N_1} + \gamma \alpha_1 S_2 \frac{I_2}{N_2} - (b + \alpha_1 + u)I_1 + \alpha_1 I_2, \\ \frac{dT_1}{dt} &= uI_1 - (b + d + \alpha_1)T_1 + \alpha_1 T_2, \\ \frac{dR_1}{dt} &= dT_1 - (b + \alpha_1 + \alpha_2)R_1 + \alpha_1 R_2, \\ \frac{dS_2}{dt} &= a - bS_2 - \beta S_2 \frac{I_2}{N_2} + \alpha_1 S_1 - \gamma \alpha_1 S_1 \frac{I_1}{N_1} - \alpha_1 S_2 + \alpha_2 R_2, \\ \frac{dI_2}{dt} &= \beta S_2 \frac{I_2}{N_2} + \gamma \alpha_1 S_1 \frac{I_1}{N_1} - (b + \alpha_1 + u)I_2 + \alpha_1 I_1, \\ \frac{dT_2}{dt} &= uI_2 - (b + d + \alpha_1)T_2 + \alpha_1 T_1, \\ \frac{dR_2}{dt} &= dT_2 - (b + \alpha_1 + \alpha_2)R_2 + \alpha_1 R_1.\end{aligned}\tag{4.20}$$

dengan

S_i : banyaknya individu *susceptible* di wilayah i ($i=1,2$),

I_i : banyaknya individu *infected* di wilayah i ($i=1,2$),

T_i : banyaknya individu *treatment* di wilayah i ($i=1,2$),

R_i : banyaknya individu *removed* di wilayah i ($i=1,2$),

a : banyaknya kelahiran,

b : tingkat kematian alami,

d : tingkat penyembuhan,

α_2 : tingkat individu *removed* yang kembali menjadi individu rentan,

α_1 : tingkat perpindahan individu antar dua wilayah,

β : tingkat penularan dalam satu wilayah,

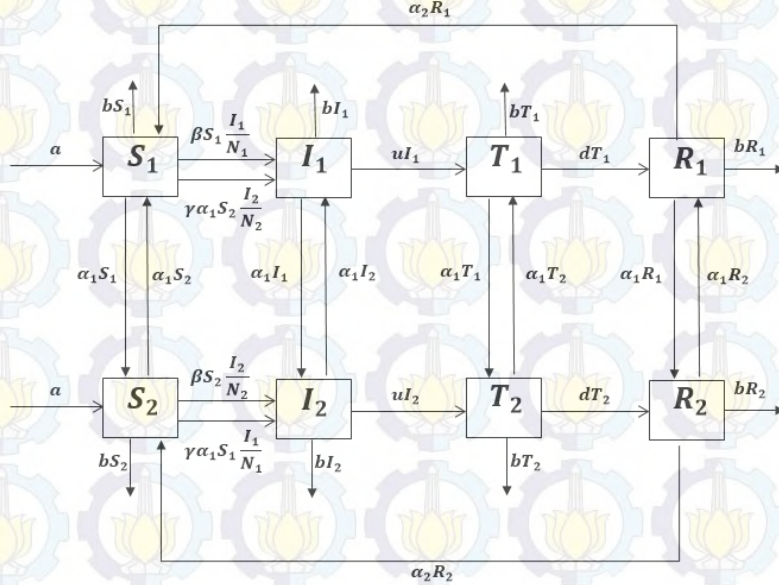
$\gamma \alpha_1$: tingkat penularan pada saat perjalanan antar dua wilayah,

$\beta S_i \frac{I_i}{N_i}$: banyaknya kasus infeksi baru per satuan waktu dalam wilayah i ($i=1,2$),

$\gamma \alpha_1 S_i \frac{I_i}{N_i}$: banyaknya kasus infeksi baru per satuan waktu dari wilayah i ke wilayah

j ($i, j=1,2$), ($i \neq j$),

u : kontrol pengobatan



Gambar 4.2 Diagram kompartemen model II

Jika $N(t)$ adalah jumlah total populasi, maka $N(t) = S_1(t) + I_1(t) + T_1(t) + R_1(t) + S_2(t) + I_2(t) + T_2(t) + R_2(t)$ sehingga

$$\begin{aligned}
 \frac{dN}{dt} &= \frac{dS_1}{dt} + \frac{dI_1}{dt} + \frac{dT_1}{dt} + \frac{dR_1}{dt} + \frac{dS_2}{dt} + \frac{dI_2}{dt} + \frac{dT_2}{dt} + \frac{dR_2}{dt} \\
 &= a - bS_1 - \beta S_1 \frac{I_1}{N_1} - \alpha_1 S_1 + \alpha_1 S_2 - \gamma \alpha_1 S_2 \frac{I_2}{N_2} + \alpha_2 R_1 + \beta S_1 \frac{I_1}{N_1} \\
 &\quad + \gamma \alpha_1 S_2 \frac{I_2}{N_2} - (b + \alpha_1 + u)I_1 + \alpha_1 I_2 + uI_1 - (b + d + \alpha_1)T_1 \\
 &\quad + \alpha_1 T_2 + dT_1 - (b + \alpha_1 + \alpha_2)R_1 + \alpha_1 R_2 + a - bS_2 \\
 &\quad - \beta S_2 \frac{I_2}{N_2} - \alpha_1 S_2 + \alpha_1 S_1 - \gamma \alpha_1 S_1 \frac{I_1}{N_1} + \alpha_2 R_2 + \beta S_2 \frac{I_2}{N_2} \\
 &\quad + \gamma \alpha_1 S_1 \frac{I_1}{N_1} - (b + \alpha_1 + u)I_2 + \alpha_1 I_1 + uI_2 - (b + d + \alpha_1)T_2 \\
 &\quad + \alpha_1 T_1 + dT_2 - (b + \alpha_1 + \alpha_2)R_2 + \alpha_1 R_1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2a - bS_1 - bI_1 - bT_1 - bR_1 - bS_2 - bI_2 - bT_2 - bR_2 \\
&= 2a - b(S_1 + I_1 + T_1 + R_1 + S_2 + I_2 + T_2 + R_2)
\end{aligned}$$

$$\frac{dN}{dt} = 2a - bN$$

Kemudian diselesaikan dengan menggunakan pemisahan variabel.

$$N(t) = \frac{2a}{b} - \frac{1}{b}e^{-b(t+c)}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} N(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{2a}{b} - \frac{1}{b}e^{-b(t+c)} \right)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} N(t) = \frac{2a}{b}$$

Karena $\lim_{t \rightarrow \infty} N(t) = \frac{2a}{b}$, maka $0 \leq N(t) \leq \frac{2a}{b}$.

Dari penyelesaian di atas, dapat disimpulkan bahwa model (4.20) memiliki penyelesaian terbatas dengan daerah penyelesaiannya adalah

$$\begin{aligned}
\Omega = \{ &(S_1, I_1, T_1, R_1, S_2, I_2, T_2, R_2) | S_1 \geq 0; I_1 \geq 0; T_1 \geq 0; R_1 \geq 0; S_2 \geq 0; I_2 \\
&\geq 0; T_2 \geq 0; R_2 \geq 0; S_1 + I_1 + R_1 + S_2 + I_2 + R_2 = N(t) \leq \frac{2a}{b} \}
\end{aligned}$$

4.2.2 Titik Keseimbangan pada Model II

Titik keseimbangan dari sistem (4.20) dapat diperoleh jika $\frac{dS}{dt} = \frac{dI}{dt} = \frac{dT}{dt} = \frac{dR}{dt} = 0$. Kemudian berdasarkan batasan masalah, kedua wilayah identik yaitu memiliki kesamaan parameter epidemiologi yang diantaranya adalah tingkat penularan penyakit di wilayah satu sama dengan di wilayah dua. Sedemikian sehingga dapat dikatakan bahwa analisis titik keseimbangan yang dilakukan di satu wilayah sudah mewakili untuk dua wilayah, sehingga sistem persamaan (4.20) menjadi

$$a - bS - \beta S \frac{I}{N} - \gamma \alpha_1 S \frac{I}{N} + \alpha_2 R = 0, \quad (4.21.a)$$

$$\beta S \frac{I}{N} + \gamma \alpha_1 S \frac{I}{N} - (b + u)I = 0, \quad (4.21.b)$$

$$uI - (b + d)T = 0 \quad (4.21.c)$$

$$dT - (b + \alpha_2)R = 0. \quad (4.21.d)$$

Berdasarkan persamaan (4.21.b) diperoleh,

$$\beta S \frac{I}{N} + \gamma \alpha_1 S \frac{I}{N} - (b + u)I = 0,$$

$$\left(\frac{\beta S}{N} + \frac{\gamma \alpha_1 S}{N} - b - u \right) I = 0,$$

Penyelesaian dari persamaan (4.21.b) adalah

$$I = 0,$$

atau

$$\left(\frac{\beta S}{N} + \frac{\gamma \alpha_1 S}{N} - b - u \right) = 0 \quad (4.22)$$

Untuk $I = 0$ disubstitusikan ke persamaan (4.21.c), sehingga diperoleh

$$-bT - dT = 0,$$

$$(-b - d)T = 0,$$

$$T = 0.$$

Untuk $T = 0$ disubstitusikan ke persamaan (4.21.d), sehingga diperoleh

$$(-b - \alpha_2)R = 0,$$

$$R = 0.$$

Kemudian $I = 0$ dan $R = 0$ disubstitusikan ke persamaan (4.21.a) sehingga diperoleh

$$a - bS = 0,$$

$$bS = a,$$

$$S = \frac{a}{b}.$$

Dengan demikian diperoleh titik kesetimbangan bebas penyakit $E_b^0 =$

$$(S_1^0, I_1^0, T_1^0, R_1^0, S_2^0, I_2^0, T_2^0, R_2^0) = \left(\frac{a}{b}, 0, 0, 0, \frac{a}{b}, 0, 0, 0 \right).$$

Proses penentuan angka reproduksi dasar menggunakan cara yang sama dengan model I.

Diberikan $x = (S_1 \ I_1 \ T_1 \ R_1 \ S_2 \ I_2 \ T_2 \ R_2)^T$ dengan $S_1, I_1, T_1, R_1, S_2, I_2, T_2, R_2 \geq 0$

Misalkan diberikan X_s adalah himpunan dari semua titik kesetimbangan bebas penyakit

$$X_s = \{x \geq 0 | I_1, I_2 = 0\}$$

Fungsi $\mathcal{F}, \mathcal{V}^+$ dan \mathcal{V}^- harus memenuhi asumsi dasar sebagai berikut.

1. Jika $S_1, I_1, T_1, R_1, S_2, I_2, T_2, R_2 \geq 0$, maka $\mathcal{F}_i, \mathcal{V}_i^-, \mathcal{V}_i^+ \geq 0$

Artinya individu pada populasi *susceptible*, *infected*, *treatment*, dan *removed* ada dan apabila terjadi kontak dengan individu *infected* mengakibatkan terjadinya individu *infected* baru dan perubahan pada masing-masing populasi. Sehingga $\mathcal{F}_i, \mathcal{V}_i^-, \mathcal{V}_i^+$ dari model terpenuhi, yaitu sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \beta S_1 \frac{I_1}{N_1} + \gamma \alpha_1 S_2 \frac{I_2}{N_2} &\geq 0 \text{ dan } \beta S_2 \frac{I_2}{N_2} + \gamma \alpha_1 S_1 \frac{I_1}{N_1} \geq 0. \\ a, bS_1, \alpha_1 S_1, bS_2, \alpha_1 S_2 &\geq 0 \text{ dan } bI_1, uI_1, \alpha_1 I_1, bI_2, uI_1, \alpha_1 I_2 \geq 0. \\ bT_1, dT_1, \alpha_1 T_1, bT_2, dT_2, \alpha_1 T_2 &\geq 0. \\ bR_1, \alpha_1 R_1, \alpha_2 R_1, bR_2, \alpha_1 R_2, \alpha_2 R_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

2. Jika $I_1, I_2 = 0$ maka $\mathcal{V}_i^- = 0$. Secara khusus, jika $x \in X_s$, maka $\mathcal{V}_i^- = 0$

Artinya jika sebuah populasi *infected* kosong dikarenakan kematian alami atau infeksi, maka tidak ada individu yang keluar dari populasi tersebut.

$$bI_1, uI_1, \alpha_1 I_1, bI_2, uI_1, \alpha_1 I_2 = 0$$

3. $\mathcal{F}_i = 0$, jika $i > m$.

Artinya jika nilai dari $\mathcal{F}_i = 0$, maka populasi $I_1, I_2 = 0$. Dengan kata lain tidak terjadi munculnya infeksi baru yang diakibatkan oleh individu *infected*. Sehingga model mempunyai penyelesaian bebas penyakit.

4. Jika $x \in X_s$, maka $\mathcal{F}_i(x) = 0$ dan $\mathcal{V}_i^+ = 0$ untuk $i = 1, \dots, m$.

Artinya jika populasi bebas dari penyakit maka populasi akan tetap bebas dari penyakit (tidak ada perpindahan individu atau penularan infeksi).

$$I_1, I_2 = 0$$

5. Didefinisikan DFE dari f adalah penyelesaian kestabilan lokal dari titik kesetimbangan bebas penyakit, dengan f terbatas ke X_s . Jika populasi ada disekitar DFE, maka populasi akan kembali ke DFE

Dari sistem (4.20) didapatkan matriks \mathcal{F} dan \mathcal{V} sebagai berikut,

$$\mathcal{F} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\beta S_1 I_1}{N_1} + \frac{\gamma \alpha_1 S_2 I_2}{N_2} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{\beta S_2 I_2}{N_2} + \frac{\gamma \alpha_1 S_1 I_1}{N_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ dan } \mathcal{V} = \begin{pmatrix} (b + \alpha_1)S_1 - a - \alpha_2 R_1 & (b + \alpha_1 + u)I_1 - \alpha_1 I_2 \\ (b + d + \alpha_1)T_1 - uI_1 - \alpha_1 T_2 & (b + \alpha_1 + \alpha_2)R_1 - dT_1 - \alpha_1 R_2 \\ (b + \alpha_1)S_2 - a - \alpha_2 R_2 & (b + \alpha_1 + u)I_2 - \alpha_1 I_1 \\ (b + d + \alpha_1)T_2 - uI_2 - \alpha_1 T_1 & (b + \alpha_1 + \alpha_2)R_2 - dT_2 - \alpha_1 R_1 \end{pmatrix}$$

Kemudian diketahui populasi yang terinfeksi adalah I_1 dan I_2 , maka didapatkan $m = 2$. Kemudian dengan menggunakan Lemma 2.2 diperoleh

$$F = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathcal{F}_1(E_b^0)}{\partial I_1} & \frac{\partial \mathcal{F}_1(E_b^0)}{\partial I_2} \\ \frac{\partial \mathcal{F}_2(E_b^0)}{\partial I_1} & \frac{\partial \mathcal{F}_2(E_b^0)}{\partial I_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta & \gamma\alpha_1 \\ \gamma\alpha_1 & \beta \end{pmatrix},$$

dan

$$V = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathcal{V}_1(E_b^0)}{\partial I_1} & \frac{\partial \mathcal{V}_1(E_b^0)}{\partial I_2} \\ \frac{\partial \mathcal{V}_2(E_b^0)}{\partial I_1} & \frac{\partial \mathcal{V}_2(E_b^0)}{\partial I_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (b + \alpha_1 + u) & -\alpha_1 \\ -\alpha_1 & (b + \alpha_1 + u) \end{pmatrix}.$$

Menurut Definisi 2.1, matriks V merupakan M-matriks non singular jika dan hanya jika terdapat bilangan k dan matriks P sedemikian sehingga $k > \rho(P)$ yang memenuhi $V = kI - P$. Kemudian Akan dibuktikan bahwa V merupakan M-matriks non singular.

$$V = k \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & \alpha_1 \\ \alpha_1 & 0 \end{pmatrix} \text{ dengan } k = b + u + \alpha_1$$

Diperoleh $\rho(P) = \alpha_1$, sehingga $k = b + u + \alpha_1 > \rho(P)$

Jadi terbukti bahwa matriks V merupakan M-matriks non singular.

kemudian dibentuk matriks generasi selanjutnya, yaitu

$$FV^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\beta B + \gamma\alpha_1^2}{C} & \frac{\beta\alpha_1 + \gamma\alpha_1 B}{C} \\ \frac{\beta\alpha_1 + \gamma\alpha_1 B}{C} & \frac{\beta B + \gamma\alpha_1^2}{C} \end{pmatrix}$$

dengan

$$B = b + u + \alpha_1$$

$$C = (b + u)(b + u + 2\alpha_1)$$

Kemudian mencari nilai eigen dari matriks FV^{-1} , yaitu

$$|FV^{-1} - \lambda I| = 0$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\beta B + \gamma\alpha_1^2}{C} - \lambda & \frac{\beta\alpha_1 + \gamma\alpha_1 B}{C} \\ \frac{\beta\alpha_1 + \gamma\alpha_1 B}{C} & \frac{\beta B + \gamma\alpha_1^2}{C} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Dimisalkan

$$\frac{\beta B + \gamma \alpha_1^2}{C} = D$$

$$\frac{\beta \alpha_1 + \gamma \alpha_1 B}{C} = E$$

Sehingga diperoleh

$$\begin{vmatrix} D - \lambda & E \\ E & D - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

$$(D - \lambda)^2 - E^2 = 0,$$

$$((D - \lambda) - E)((D - \lambda) + E) = 0,$$

$$\lambda_1 = D - E$$

$$\lambda_2 = D + E$$

Bilangan reproduksi dasar adalah *spectral radius* dari operator generasi selanjutnya, yaitu

$$\mathcal{R}_{0y} = \rho(FV^{-1})$$

$$= \max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|\}$$

$$= \max\{|D - E|, |D + E|\}$$

$$= D + E$$

$$= \frac{\beta B + \gamma \alpha_1^2}{C} + \frac{\beta \alpha_1 + \gamma \alpha_1 B}{C}$$

$$= \frac{B(\beta + \gamma \alpha_1) + \gamma(\beta + \gamma \alpha_1)}{C}$$

$$= \frac{(B + \alpha_1)(\beta + \gamma \alpha_1)}{C}$$

$$\mathcal{R}_{0y} = \frac{(b + u + 2\alpha_1)(\beta + \gamma \alpha_1)}{(b + u)(b + u + 2\alpha_1)} = \frac{\beta + \gamma \alpha_1}{b + u}.$$

Dari angka reproduksi dasar diperoleh

$$\mathcal{R}_{0y} = \frac{\beta + \gamma \alpha_1}{b + u},$$

$$b + d = \frac{\beta + \gamma \alpha_1}{\mathcal{R}_{0y}}. \quad (4.23)$$

Kemudian persamaan (4.23) disubstitusikan ke persamaan (4.22)

$$\frac{\beta S}{N} + \frac{\gamma \alpha_1 S}{N} - \frac{\beta + \gamma \alpha_1}{\mathcal{R}_{0y}} = 0,$$

$$\frac{(\beta + \gamma\alpha_1)S}{N} = \frac{\beta + \gamma\alpha_1}{\mathcal{R}_{0y}},$$

$$\frac{R_{0y}S}{N} = \frac{\beta + \gamma\alpha_1}{\beta + \gamma\alpha_1},$$

$$\frac{R_{0y}S}{N} = 1,$$

$$R_{0y}S = S + I + T + R,$$

$$(\mathcal{R}_{0y} - 1)S = I + T + R,$$

$$S = \frac{I + T + R}{\mathcal{R}_{0y} - 1}. \quad (4.24)$$

Dari persamaan (4.21.b) diperoleh

$$\beta S \frac{I}{N} + \gamma\alpha_1 S \frac{I}{N} - (b + u)I = 0,$$

$$\beta S \frac{I}{N} + \gamma\alpha_1 S \frac{I}{N} = (b + u)I. \quad (4.25)$$

Persamaan (4.25) disubstitusikan ke persamaan (4.21.a)

$$a - (b + u)I - bS + \alpha_2 R = 0,$$

Karena dari persamaan (4.21.c) diketahui

$$uI - bT - dT = 0,$$

$$uI = (b + d)T,$$

$$I = \frac{(b + d)T}{u}. \quad (4.26)$$

dan dari persamaan (4.21.d)

$$dT - (b + \alpha_2)R = 0,$$

$$dT = (b + \alpha_2)R,$$

$$T = \frac{(b + \alpha_2)R}{d}. \quad (4.27)$$

Kemudian persamaan (4.27) disubstitusikan ke persamaan (4.26), diperoleh

$$I = \frac{(b + d)(b + \alpha_2)R}{ud}. \quad (4.28)$$

maka

$$a - \frac{(b + u)(b + d)(b + \alpha_2)R}{ud} - bS + \alpha_2 R = 0,$$

$$(b^2 + bd + ub + ud)(b + \alpha_2)R = ud(a - bS + \alpha_2 R),$$

$$(b^3 + b^2d + b^2u + bdu + b^2\alpha_2 + bd\alpha_2 + ub\alpha_2 + ud\alpha_2)R \\ = ud(a - bS + \alpha_2R),$$

$$(b^3 + b^2d + b^2u + bdu + b^2\alpha_2 + bd\alpha_2 + ub\alpha_2)R = ud(a - bS),$$

$$R = \frac{ud(a - bS)}{b(b^2 + bd + bu + du + b\alpha_2 + d\alpha_2 + u\alpha_2)}. \quad (4.29)$$

Persamaan (4.29) disubstitusikan ke persamaan (4.28) dan (4.27)

$$I = \frac{(b + d)(b + \alpha_2)(a - bS)ud}{udb(b^2 + bd + bu + du + b\alpha_2 + d\alpha_2 + u\alpha_2)},$$

$$I = \frac{(b + d)(b + \alpha_2)(a - bS)}{b(b^2 + bd + bu + du + b\alpha_2 + d\alpha_2 + u\alpha_2)}, \quad (4.30)$$

dan

$$T = \frac{(b + \alpha_2)(a - bS)ud}{db(b^2 + bd + bu + du + b\alpha_2 + d\alpha_2 + u\alpha_2)},$$

$$T = \frac{(b + \alpha_2)(a - bS)u}{b(b^2 + bd + bu + du + b\alpha_2 + d\alpha_2 + u\alpha_2)}, \quad (4.31)$$

Kemudian substitusikan persamaan (4.29), (4.30) dan (4.31) ke persamaan (4.24)

$$S = \frac{I + T + R}{\mathcal{R}_{0y} - 1}.$$

$$S = \frac{(b + d)(b + \alpha_2)(a - bS) + (b + \alpha_2)(a - bS)u + ud(a - bS)}{(\mathcal{R}_{0y} - 1)b(b^2 + bd + bu + du + b\alpha_2 + d\alpha_2 + u\alpha_2)},$$

$$S(\mathcal{R}_{0y} - 1)b(b^2 + bd + bu + du + b\alpha_2 + d\alpha_2 + u\alpha_2)$$

$$= (b^2 + bd + bu + du + b\alpha_2 + d\alpha_2 + u\alpha_2)(a - bS),$$

$$S(\mathcal{R}_{0y} - 1)b = a - bS,$$

$$\mathcal{R}_{0y}bS - bS + bS = a,$$

$$\mathcal{R}_{0y}bS = a,$$

$$S = \frac{a}{b\mathcal{R}_{0y}}. \quad (4.32)$$

Kemudian persamaan (4.32) disubstitusikan ke persamaan (4.29), (4.30) dan (4.31),

sehingga diperoleh

$$R = \frac{ud\left(a - b\frac{a}{b\mathcal{R}_{0y}}\right)}{b(b^2 + bd + bu + du + b\alpha_2 + d\alpha_2 + u\alpha_2)},$$

$$R = \frac{ud \left(a - \frac{a}{\mathcal{R}_{0y}} \right)}{b(b^2 + bd + bu + du + b\alpha_2 + d\alpha_2 + u\alpha_2)'} \quad (4.33)$$

$$I = \frac{(b+d)(b+\alpha_2) \left(a - b \frac{a}{b\mathcal{R}_{0y}} \right)}{b(b^2 + bd + bu + du + b\alpha_2 + d\alpha_2 + u\alpha_2)'}$$

$$I = \frac{(b+d)(b+\alpha_2) \left(a - \frac{a}{\mathcal{R}_{0y}} \right)}{b(b^2 + bd + bu + du + b\alpha_2 + d\alpha_2 + u\alpha_2)'}$$

$$I = \frac{a(b+d)(b+\alpha_2)}{b(b^2 + bd + bu + du + b\alpha_2 + d\alpha_2 + u\alpha_2)} \left(1 - \frac{1}{\mathcal{R}_{0y}} \right). \quad (4.34)$$

dan

$$T = \frac{(b+\alpha_2) \left(a - b \frac{a}{b\mathcal{R}_{0y}} \right) u}{b(b^2 + bd + bu + du + b\alpha_2 + d\alpha_2 + u\alpha_2)'}$$

$$T = \frac{(b+\alpha_2) \left(a - \frac{a}{\mathcal{R}_{0y}} \right) u}{b(b^2 + bd + bu + du + b\alpha_2 + d\alpha_2 + u\alpha_2)'}$$

$$T = \frac{ua(b+\alpha_2)}{b(b^2 + bd + bu + du + b\alpha_2 + d\alpha_2 + u\alpha_2)} \left(1 - \frac{1}{\mathcal{R}_{0y}} \right). \quad (4.35)$$

Persamaan (4.32), (4.33), (4.34) dan (4.35) merupakan titik kesetimbangan endemik $E_b^+ = (S_1^+, I_1^+, T_1^+, R_1^+, S_2^+, I_2^+, T_2^+, R_2^+)$ dimana $(i = 1, 2)$

$$S_i^+ = \frac{a}{b\mathcal{R}_{0y}},$$

$$I_i^+ = \frac{a(b+d)(b+\alpha_2)}{b(b^2 + bd + bu + du + b\alpha_2 + d\alpha_2 + u\alpha_2)} \left(1 - \frac{1}{\mathcal{R}_{0y}} \right),$$

$$T_i^+ = \frac{ua(b+\alpha_2)}{b(b^2 + bd + bu + du + b\alpha_2 + d\alpha_2 + u\alpha_2)} \left(1 - \frac{1}{\mathcal{R}_{0y}} \right),$$

$$R_i^+ = \frac{uad}{b(b^2 + bd + bu + du + b\alpha_2 + d\alpha_2 + u\alpha_2)} \left(1 - \frac{1}{\mathcal{R}_{0y}} \right).$$

4.2.3 Kestabilan Titik Keseimbangan pada Model II

Sebelum menentukan kestabilan titik keseimbangan, terlebih dahulu dilakukan perhitungan matriks Jacobi dari sistem (4.20). Matriks Jacobi dari sistem (4.20) adalah

$$J = \begin{pmatrix} A_2 & B_2 \\ B_2 & A_2 \end{pmatrix}$$

dengan titik keseimbangan $(S_1, I_1, T_1, R_1, S_2, I_2, T_2, R_2)$ dan

$$A_2 = \begin{pmatrix} -(b + \alpha_1) - \frac{\beta I(I + T + R)}{N^2} & -\frac{\beta S(S + T + R)}{N^2} & \frac{\beta SI}{N^2} & \frac{\beta SI}{N^2} + \alpha_2 \\ \frac{\beta I(I + T + R)}{N^2} & \frac{\beta S(S + T + R)}{N^2} - (b + \alpha_1 + u) & -\frac{\beta SI}{N^2} & -\frac{\beta SI}{N^2} \\ 0 & u & -(b + d + \alpha_1) & 0 \\ 0 & 0 & d & -(b + \alpha_1 + \alpha_2) \end{pmatrix}$$

$$B_2 = \begin{pmatrix} -\frac{\gamma \alpha_1 I(I + T + R)}{N^2} + \alpha_1 & -\frac{\gamma \alpha_1 S(S + T + R)}{N^2} & \frac{\gamma \alpha_1 SI}{N^2} & \frac{\gamma \alpha_1 SI}{N^2} \\ \frac{\gamma \alpha_1 I(I + T + R)}{N^2} & \frac{\gamma \alpha_1 S(S + T + R)}{N^2} + \alpha_1 & -\frac{\gamma \alpha_1 SI}{N^2} & -\frac{\gamma \alpha_1 SI}{N^2} \\ 0 & 0 & \alpha_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_1 \end{pmatrix}$$

Titik keseimbangan bebas penyakit $E_b^0 = (\frac{a}{b}, 0, 0, 0, \frac{a}{b}, 0, 0, 0)$. disubstitusikan ke dalam matriks Jacobi, sehingga diperoleh

$$J(E_b^0) = \begin{pmatrix} A_2 & B_2 \\ B_2 & A_2 \end{pmatrix}$$

dengan

$$A_2 = \begin{pmatrix} -b - \alpha_1 & -\beta & 0 & \alpha_2 \\ 0 & \beta - (b + \alpha_1 + u) & 0 & 0 \\ 0 & u & -(b + d + \alpha_1) & 0 \\ 0 & 0 & d & -(b + \alpha_1 + \alpha_2) \end{pmatrix}$$

dan

$$B_2 = \begin{pmatrix} \alpha_1 & -\gamma \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_1(1 + \gamma) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_1 \end{pmatrix}$$

Nilai eigen dari $J(E_b^0)$ dapat diketahui dengan mencari nilai eigen dari $A_2 + B_2$ dan $A_2 - B_2$.

$$A_2 + B_2 = \begin{pmatrix} -b & -\beta - \gamma \alpha_1 & 0 & \alpha_2 \\ 0 & \beta - (b + u) + \gamma \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & u & -(b + d) & 0 \\ 0 & 0 & d & -(b + \alpha_2) \end{pmatrix}$$

$$|A_2 + B_2 - \lambda I| = \begin{vmatrix} -b - \lambda & -\beta - \gamma\alpha_1 & 0 & \alpha_2 \\ 0 & \beta - (b + u) + \gamma\alpha_1 - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & u & -(b + d) - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & d & -(b + \alpha_2) - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Sehingga diperoleh persamaan karakteristik sebagai berikut,

$$(-b - \lambda)(\beta - (b + u) + \gamma\alpha_1 - \lambda)(-(b + d) - \lambda)(-(b + \alpha_2) - \lambda) = 0$$

dan nilai eigen yang didapat adalah

$$\lambda_1 = -b, \lambda_2 = \beta - (b + u) + \gamma\alpha_1, \lambda_3 = -(b + d) \text{ dan } \lambda_4 = -(b + \alpha_2)$$

Kemudian dengan mensubstitusikan persamaan (4.23), maka λ_2 dapat ditulis kembali sebagai $\lambda_2 = (\beta + \gamma\alpha_1) \left(1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0}\right)$. Semua nilai eigen matriks $A_2 + B_2$ bernilai negatif jika $\mathcal{R}_0 < 1$ dan bernilai $\lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0, \lambda_3 < 0$, dan $\lambda_4 < 0$ jika $\mathcal{R}_0 > 1$. Selanjutnya,

$$A_2 - B_2 = \begin{pmatrix} -(b + 2\alpha_1) & -\beta + \gamma\alpha_1 & 0 & \alpha_2 \\ 0 & \beta - (b + u) - \alpha_1(2 + \gamma) & 0 & 0 \\ 0 & u & -(b + d + 2\alpha_1) & 0 \\ 0 & 0 & d & -(b + 2\alpha_1 + \alpha_2) \end{pmatrix}$$

$$|A_2 - B_2 - \lambda I| = \begin{vmatrix} -(b + 2\alpha_1) - \lambda & -\beta + \gamma\alpha_1 & 0 & \alpha_2 \\ 0 & \beta - (b + u) - \alpha_1(2 + \gamma) - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & u & -(b + d + 2\alpha_1) - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & d & -(b + 2\alpha_1 + \alpha_2) - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Sehingga diperoleh persamaan karakteristik sebagai berikut,

$$(-b - 2\alpha_1 - \lambda)(\beta - (b + u) - \alpha_1(2 + \gamma) - \lambda)(-(b + d + 2\alpha_1) - \lambda)(-(b + 2\alpha_1 + \alpha_2) - \lambda) = 0$$

Nilai eigen yang didapat adalah

$$\lambda_5 = -(b + 2\alpha_1), \lambda_6 = \beta - (b + u) - \alpha_1(2 + \gamma),$$

$$\lambda_7 = -(b + d + 2\alpha_1) \text{ dan } \lambda_8 = -(b + 2\alpha_1 + \alpha_2)$$

Berdasarkan keempat nilai eigen yang telah didapatkan, maka semua nilai eigen matriks $A_2 - B_2$ bernilai negatif jika $\mathcal{R}_0 < 1$.

Dari semua nilai eigen yang telah diperoleh, untuk titik kesetimbangan bebas penyakit dapat disimpulkan jika $\mathcal{R}_0 < 1$ maka bersifat stabil asimtotik dan jika $\mathcal{R}_0 > 1$ maka bersifat tidak stabil.

Titik kesetimbangan endemi $E_b^+ = (S_1^+, I_1^+, T_1^+, R_1^+, S_2^+, I_2^+, T_2^+, R_2^+)$ disubstitusikan ke dalam matriks Jacobi, sehingga diperoleh

$$J(E_b^+) = \begin{pmatrix} A_2 & B_2 \\ B_2 & A_2 \end{pmatrix}$$

dengan

$$A_2 = \begin{pmatrix} -b-\alpha_1 - \beta\left(1-\frac{1}{\mathcal{R}_0}\right)^2 k & -\beta\left(\frac{1}{\mathcal{R}_0} - \frac{1}{\mathcal{R}_0}\left(1-\frac{1}{\mathcal{R}_0}\right)k\right) & \beta\frac{1}{\mathcal{R}_0}\left(1-\frac{1}{\mathcal{R}_0}\right)k & \beta\frac{1}{\mathcal{R}_0}\left(1-\frac{1}{\mathcal{R}_0}\right)k + \alpha_2 \\ \beta\left(1-\frac{1}{\mathcal{R}_0}\right)^2 k & \beta\left(\frac{1}{\mathcal{R}_0} - \frac{1}{\mathcal{R}_0}\left(1-\frac{1}{\mathcal{R}_0}\right)k\right) - (b + \alpha_1 + u) & -\beta\frac{1}{\mathcal{R}_0}\left(1-\frac{1}{\mathcal{R}_0}\right)k & -\beta\frac{1}{\mathcal{R}_0}\left(1-\frac{1}{\mathcal{R}_0}\right)k \\ 0 & u & -(b+d+\alpha_1) & 0 \\ 0 & 0 & d & -(b+\alpha_1+\alpha_2) \end{pmatrix}$$

$$B_2 = \begin{pmatrix} -\gamma\alpha_1\left(1-\frac{1}{\mathcal{R}_0}\right)^2 k + \alpha_1 & -\gamma\alpha_1\left(\frac{1}{\mathcal{R}_0} - \frac{1}{\mathcal{R}_0}\left(1-\frac{1}{\mathcal{R}_0}\right)k\right) & \gamma\alpha_1\frac{1}{\mathcal{R}_0}\left(1-\frac{1}{\mathcal{R}_0}\right)k & \gamma\alpha_1\frac{1}{\mathcal{R}_0}\left(1-\frac{1}{\mathcal{R}_0}\right)k \\ \gamma\alpha_1\left(1-\frac{1}{\mathcal{R}_0}\right)^2 k & \gamma\alpha_1\left(\frac{1}{\mathcal{R}_0} - \frac{1}{\mathcal{R}_0}\left(1-\frac{1}{\mathcal{R}_0}\right)k\right) + \alpha_1 & -\gamma\alpha_1\frac{1}{\mathcal{R}_0}\left(1-\frac{1}{\mathcal{R}_0}\right)k & -\gamma\alpha_1\frac{1}{\mathcal{R}_0}\left(1-\frac{1}{\mathcal{R}_0}\right)k \\ 0 & 0 & \alpha_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_1 \end{pmatrix}$$

dengan $k = \frac{(b+d)(b+\alpha_2)}{(b^2+bd+bu+du+b\alpha_2+d\alpha_2+u\alpha_2)}$.

Menggunakan cara yang sama, nilai eigen dari $J(E_b^+)$ dapat diketahui dengan menganalisis nilai eigen dari $A_2 + B_2$ dan $A_2 - B_2$.

$$A_2 + B_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & a_{32} & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \quad \text{dan} \quad A_2 - B_2 = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{14} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ 0 & b_{32} & b_{33} & 0 \\ 0 & 0 & b_{43} & b_{44} \end{pmatrix}$$

Diketahui elemen dari $A_2 + B_2$ adalah

$$a_{11} = -(\beta + \gamma\alpha_1)\left(1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0}\right)^2 k - b$$

$$a_{12} = -(\beta + \gamma\alpha_1)\left(\frac{1}{\mathcal{R}_0} - \frac{1}{\mathcal{R}_0}\left(1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0}\right)k\right)$$

$$a_{13} = (\beta + \gamma\alpha_1)\frac{1}{\mathcal{R}_0}\left(1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0}\right)k$$

$$a_{14} = (\beta + \gamma\alpha_1)\frac{1}{\mathcal{R}_0}\left(1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0}\right)k + \alpha_2$$

$$a_{21} = (\beta + \gamma\alpha_1) \left(1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0}\right)^2 k$$

$$a_{22} = (\beta + \gamma\alpha_1) \left(\frac{1}{\mathcal{R}_0} - \frac{1}{\mathcal{R}_0} \left(1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0}\right) k\right) - (b + u)$$

$$a_{23} = -(\beta + \gamma\alpha_1) \frac{1}{\mathcal{R}_0} \left(1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0}\right) k$$

$$a_{24} = -(\beta + \gamma\alpha_1) \frac{1}{\mathcal{R}_0} \left(1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0}\right) k$$

$$a_{32} = u$$

$$a_{33} = -(b + d)$$

$$a_{43} = d$$

$$a_{44} = -(b + \alpha_2)$$

dan elemen dari $A_2 - B_2$ adalah

$$b_{11} = -(\beta - \gamma\alpha_1) \left(1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0}\right)^2 k - (b + 2\alpha_1)$$

$$b_{12} = -(\beta - \gamma\alpha_1) \left(\frac{1}{\mathcal{R}_0} - \frac{1}{\mathcal{R}_0} \left(1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0}\right) k\right)$$

$$b_{13} = (\beta - \gamma\alpha_1) \frac{1}{\mathcal{R}_0} \left(1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0}\right) k$$

$$b_{14} = (\beta - \gamma\alpha_1) \frac{1}{\mathcal{R}_0} \left(1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0}\right) k + \alpha_2$$

$$b_{21} = (\beta - \gamma\alpha_1) \left(1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0}\right)^2 k$$

$$b_{22} = (\beta - \gamma\alpha_1) \left(\frac{1}{\mathcal{R}_0} - \frac{1}{\mathcal{R}_0} \left(1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0}\right) k\right) - (b + u + 2\alpha_1)$$

$$b_{23} = -(\beta - \gamma\alpha_1) \frac{1}{\mathcal{R}_0} \left(1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0}\right) k$$

$$b_{24} = -(\beta - \gamma\alpha_1) \frac{1}{\mathcal{R}_0} \left(1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0}\right) k$$

$$b_{32} = u$$

$$b_{33} = -(b + d + 2\alpha_1)$$

$$b_{43} = d$$

$$b_{44} = -(b + \alpha_2 + 2\alpha_1)$$

Dengan menambahkan baris 1 ke baris 2,3, dan 4, kemudian menambahkan kolom 2, 3, dan 4 ke kolom 1 yang dikalikan (-1) sehingga $A_2 + B_2$ dan $A_2 - B_2$ menjadi

$$A_2 + B_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & a_{32} & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \text{ dan } A_2 - B_2 = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ 0 & b_{32} & b_{33} & 0 \\ 0 & 0 & b_{43} & b_{44} \end{pmatrix}$$

elemen dari $A_2 + B_2$ adalah

$$a_{11} = -b$$

$$a_{21} = (\beta + \gamma\alpha_1) \left(1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0}\right)^2 k$$

$$a_{22} = (\beta + \gamma\alpha_1) \left(\frac{1}{\mathcal{R}_0} - \left(1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0}\right)k\right) - (b + u)$$

$$a_{23} = -(\beta + \gamma\alpha_1) \left(1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0}\right)k$$

$$a_{24} = -(\beta + \gamma\alpha_1) \left(1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0}\right)k$$

$$a_{32} = u$$

$$a_{33} = -(b + d)$$

$$a_{43} = d$$

$$a_{44} = -(b + \alpha_2)$$

dan elemen dari $A_2 - B_2$ adalah

$$b_{11} = -(b + 2\alpha_1)$$

$$b_{21} = (\beta - \gamma\alpha_1) \left(1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0}\right)^2 k$$

$$b_{22} = (\beta - \gamma\alpha_1) \left(\frac{1}{\mathcal{R}_0} - \left(1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0}\right)k\right) - (b + u + 2\alpha_1)$$

$$b_{23} = -(\beta - \gamma\alpha_1) \left(1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0}\right)k$$

$$b_{24} = -(\beta - \gamma\alpha_1) \left(1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0}\right)k$$

$$b_{32} = u$$

$$b_{33} = -(b + d + 2\alpha_1)$$

$$b_{43} = d$$

$$b_{44} = -(b + \alpha_2 + 2\alpha_1)$$

Dengan menggunakan ekspansi kofaktor maka didapatkan,

$$A_2 + B_2 = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & 0 \\ 0 & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \quad \text{dan} \quad A_2 - B_2 = b_{11} \begin{vmatrix} b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{32} & b_{33} & 0 \\ 0 & b_{43} & b_{44} \end{vmatrix}$$

Diketahui bahwa nilai eigen dari a_{11} dan b_{11} bernilai negatif.

Untuk menunjukkan bahwa $A_2 + B_2$ dan $A_2 - B_2$ memiliki nilai-nilai eigen negatif ketika $\mathcal{R}_0 > 1$ digunakan Lemma 2.1.

Pembuktian untuk $A_2 + B_2$ adalah sebagai berikut.

- (i) Untuk membuktikan $Q_1 > 0$, maka harus dibuktikan bahwa $a_{22} + a_{33} + a_{44} < 0$

$$\begin{aligned} a_{22} &= (\beta + \gamma\alpha_1) \left(\frac{1}{\mathcal{R}_0} - \left(1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0} \right) k \right) - (b + u) \\ &= (\beta + \gamma\alpha_1) \left(\frac{b + u}{\beta + \gamma\alpha_1} - \left(1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0} \right) k \right) - (b + u) \\ &= (\beta + \gamma\alpha_1) \left(- \left(1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0} \right) k \right) < 0 \end{aligned}$$

$$a_{33} = -(b + d) < 0$$

$$a_{44} = -(b + \alpha_2) < 0$$

Karena $\mathcal{R}_0 > 1$ maka terbukti $Q_1 > 0$.

- (ii) Untuk membuktikan $Q_3 > 0$, maka harus dibuktikan $a_{22}a_{33}a_{44} < 0$,

$$a_{24}a_{32}a_{43} < 0, \text{ dan } a_{23}a_{32}a_{44} > 0$$

a. Karena $a_{22} < 0$, $a_{33} < 0$, dan $a_{44} < 0$, maka $a_{22}a_{33}a_{44} < 0$.

b. $a_{24} = -(\beta + \gamma\alpha_1) \left(1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0} \right) k < 0$ jika $\mathcal{R}_0 > 1$

$$a_{32} = u > 0 \text{ dan } a_{43} = d > 0. \text{ Sehingga } a_{24}a_{32}a_{43} < 0.$$

c. $a_{23} = -(\beta + \gamma\alpha_1) \left(1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0} \right) k < 0$ jika $\mathcal{R}_0 > 1$

$$a_{32} = u > 0 \text{ dan } a_{44} = -(b + \alpha_2) < 0. \text{ Sehingga } a_{23}a_{32}a_{44} > 0.$$

Untuk $\mathcal{R}_0 > 1$ maka $a_{22}a_{33}a_{44} < 0$, $a_{24}a_{32}a_{43} < 0$, dan $a_{23}a_{32}a_{44} > 0$.

Maka terbukti $Q_3 > 0$.

$$\begin{aligned}
\text{(iii)} \quad Q_1 Q_2 - Q_3 &= -(a_{22} + a_{33} + a_{44})(Q_a + Q_b) + (a_{22}a_{33}a_{44} + a_{24}a_{32}a_{43} - a_{23}a_{32}a_{44}) \\
&= -(a_{22} + a_{33} + a_{44})(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32} + a_{22}a_{44} + a_{33}a_{44}) \\
&\quad + (a_{22}a_{33}a_{44} + a_{24}a_{32}a_{43} - a_{23}a_{32}a_{44}) \\
&= -2a_{22}^2a_{33} + a_{22}a_{23}a_{32} - 2a_{22}^2a_{44} + a_{33}a_{23}a_{32} \\
&\quad - 2a_{22}a_{33}a_{44} - 2a_{33}^2a_{44} + a_{24}a_{32}a_{43} \\
&= -2(a_{22}^2a_{33} + a_{22}^2a_{44} + a_{33}^2a_{44} + a_{22}a_{33}a_{44}) + a_{22}a_{23}a_{32} \\
&\quad + a_{33}a_{23}a_{32} + a_{24}a_{32}a_{43} > 0
\end{aligned}$$

Untuk $\mathcal{R}_0 > 1$ maka $Q_1 Q_2 - Q_3 > 0$.

Dari (i)-(iii) dapat dikatakan bahwa semua nilai eigen dari matriks $A_2 + B_2$ adalah negatif jika $\mathcal{R}_0 > 1$.

Selanjutnya dengan cara yang sama untuk matriks $A_2 - B_2$ diperoleh,

(i') Untuk membuktikan $Q_1 > 0$, maka dibuktikan bahwa $b_{22} + b_{33} + b_{44} < 0$

$$\begin{aligned}
b_{22} &= (\beta - \gamma\alpha_1) \left(\frac{1}{\mathcal{R}_0} - \left(1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0} \right) k \right) - (b + u + 2\alpha_1) \\
&= (\beta - \gamma\alpha_1) \frac{1}{\mathcal{R}_0} - (\beta - \gamma\alpha_1) \left(1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0} \right) k - (b + u + 2\alpha_1) \\
&= (\beta - \gamma\alpha_1) \frac{b + u}{\beta + \gamma\alpha_1} - (b + u) - (\beta - \gamma\alpha_1) \left(1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0} \right) k - 2\alpha_1 \\
&= (b + u) \left(\frac{\beta - \gamma\alpha_1}{\beta + \gamma\alpha_1} - 1 \right) - (\beta - \gamma\alpha_1) \left(1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0} \right) k - 2\alpha_1 < 0
\end{aligned}$$

$$b_{33} = -(b + d + 2\alpha_1) < 0$$

$$b_{44} = -(b + \alpha_2 + 2\alpha_1) < 0$$

Karena $\mathcal{R}_0 > 1$ maka terbukti $Q_1 > 0$.

(ii') Untuk membuktikan $Q_3 > 0$, maka harus dibuktikan $b_{22}b_{33}b_{44} < 0$,

$$b_{24}b_{32}b_{43} < 0, \text{ dan } b_{23}b_{32}b_{44} > 0$$

a. Karena $b_{22} < 0, b_{33} < 0$, dan $b_{44} < 0$, maka $b_{22}b_{33}b_{44} < 0$.

b. $b_{24} = -(\beta - \gamma\alpha_1) \left(1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0} \right) k < 0$ jika $\mathcal{R}_0 > 1$

$b_{32} = u > 0$ dan $b_{43} = d > 0$. Sehingga $b_{24}b_{32}b_{43} < 0$.

c. $b_{23} = -(\beta - \gamma\alpha_1) \left(1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0} \right) k < 0$ jika $\mathcal{R}_0 > 1$

$b_{32} = u > 0$ dan $b_{44} = -(b + \alpha_2 + 2\alpha_1) < 0$. Sehingga $b_{23}b_{32}b_{44} > 0$.

Untuk $\mathcal{R}_0 > 1$ maka $b_{22}b_{33}b_{44} < 0$, $b_{24}b_{32}b_{43} < 0$, dan $b_{23}b_{32}b_{44} > 0$.

Maka terbukti $Q_3 > 0$.

$$\begin{aligned}
 \text{(iii')} Q_1 Q_2 - Q_3 &= -(b_{22} + b_{33} + b_{44})(Q_a + Q_b) + (b_{22}b_{33}b_{44} + b_{24}b_{32}b_{43} - \\
 &\quad b_{23}b_{32}b_{44}) \\
 &= -(b_{22} + b_{33} + b_{44})(b_{22}b_{33} - b_{23}b_{32} + b_{22}b_{44} + b_{33}b_{44}) \\
 &\quad + (b_{22}b_{33}b_{44} + b_{24}b_{32}b_{43} - b_{23}b_{32}b_{44}) \\
 &= -2b_{22}^2b_{33} + b_{22}b_{23}b_{32} - 2b_{22}^2b_{44} + b_{33}b_{23}b_{32} - 2b_{22}b_{33}b_{44} \\
 &\quad - 2b_{33}^2b_{44} + b_{24}b_{32}b_{43} \\
 &= -2(b_{22}^2b_{33} + b_{22}^2b_{44} + b_{33}^2b_{44} + b_{22}b_{33}b_{44}) + b_{22}b_{23}b_{32} \\
 &\quad + b_{33}b_{23}b_{32} + b_{24}b_{32}b_{43} > 0
 \end{aligned}$$

Untuk $\mathcal{R}_0 > 1$ maka $Q_1 Q_2 - Q_3 > 0$.

Dari (i') - (iii') dapat dikatakan bahwa semua nilai eigen dari matriks $A_2 - B_2$ adalah negatif jika $\mathcal{R}_0 > 1$.

Dari semua nilai eigen yang telah diperoleh $A_2 + B_2$ dan $A_2 - B_2$, untuk titik kesetimbangan endemi dapat disimpulkan jika $\mathcal{R}_0 > 1$ maka bersifat stabil asimtotik.

Syarat eksistensi titik kesetimbangan berdasarkan bilangan reproduksi dasar adalah ketika $\mathcal{R}_0 < 1$ sistem (4.20) hanya ada satu titik kesetimbangan yang eksis, yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit dan memiliki sifat stabil asimtotik, sedangkan ketika $\mathcal{R}_0 > 1$ sistem (4.20) terdapat dua titik kesetimbangan yang eksis, yaitu titik kesetimbangan endemi bersifat stabil asimtotik dan titik kesetimbangan bebas penyakit bersifat tidak stabil.

Dari uraian model II di atas dapat diperoleh kesimpulan sebagai berikut.

Jika E_b^0 merupakan titik kesetimbangan bebas penyakit dan E_b^+ merupakan titik kesetimbangan endemi pada sistem (4.20) di dalam domain terbatas $\lim_{t \rightarrow \infty} N(t) = \frac{2a}{b}$ maka diketahui E_b^0 bersifat stabil asimtotik jika $\mathcal{R}_0 < 1$ dan tidak stabil jika $\mathcal{R}_0 > 1$, sedangkan E_b^+ bersifat stabil asimtotik jika $\mathcal{R}_0 > 1$.

4.2.4 Kontrol Optimal

Tujuan dari permasalahan kontrol optimal pada penelitian ini adalah meminimalkan jumlah individu terinfeksi dengan mendapatkan pengobatan yang optimal. Berdasarkan batasan masalah bahwa kedua wilayah identik, yaitu memiliki kesamaan parameter epidemiologi. Sehingga kontrol pengobatan yang dilakukan di kedua wilayah adalah sama. Sehingga fungsi objektif pada penelitian ini adalah sebagai berikut,

$$J(I_1, I_2, u) = \int_{t_0}^{t_f} \left(I_1(t) + I_2(t) + \frac{A}{2} u^2(t) \right) dt$$

dengan A adalah parameter bobot positif yang berhubungan dengan kontrol $u(t)$, t_0 adalah waktu awal, dan t_f adalah waktu akhir. Kemudian akan diperoleh $u^*(t)$ sehingga berlaku

$$J(u^*(t)) = \min \{ J(u(t)) : u \in \mathcal{U} \},$$

dengan $\mathcal{U} = \{u(t) | 0 \leq u \leq 0.9, t \in [0, t_f]\}$.

Langkah pertama yang dilakukan untuk mendapatkan kontrol pengobatan yang optimal adalah membentuk fungsi Hamiltonian, yaitu

$$\begin{aligned} H = & I_1 + I_2 + \frac{A}{2} u^2 + \lambda_{S_1} \left(a - bS_1 - \beta S_1 \frac{I_1}{N_1} + \alpha_1 S_2 - \gamma \alpha_1 S_2 \frac{I_2}{N_2} - \alpha_1 S_1 + \alpha_2 R_1 \right) \\ & + \lambda_{I_1} \left(\beta S_1 \frac{I_1}{N_1} + \gamma \alpha_1 S_2 \frac{I_2}{N_2} - (b + \alpha_1 + u) I_1 + \alpha_1 I_2 \right) \\ & + \lambda_{T_1} (u I_1 - (b + d + \alpha_1) T_1 + \alpha_1 T_2) \\ & + \lambda_{R_1} (d T_1 - (b + \alpha_1 + \alpha_2) R_1 + \alpha_1 R_2) \\ & + \lambda_{S_2} \left(a - bS_2 - \beta S_2 \frac{I_2}{N_2} + \alpha_1 S_1 - \gamma \alpha_1 S_1 \frac{I_1}{N_1} - \alpha_1 S_2 + \alpha_2 R_2 \right) \\ & + \lambda_{I_2} \left(\beta S_2 \frac{I_2}{N_2} + \gamma \alpha_1 S_1 \frac{I_1}{N_1} - (b + \alpha_1 + u) I_2 + \alpha_1 I_1 \right) \\ & + \lambda_{T_2} (u I_2 - (b + d + \alpha_1) T_2 + \alpha_1 T_1) \\ & + \lambda_{R_2} (d T_2 - (b + \alpha_1 + \alpha_2) R_2 + \alpha_1 R_1) \end{aligned}$$

Digunakan Prinsip Pontryagin dalam menyelesaikan masalah kontrol optimal. Setelah dibentuk fungsi Hamiltonian selanjutnya ditentukan persamaan *state*, persamaan *costate* dan kondisi stasioner. Jika persamaan *state*, persamaan

costate dan kondisi stasioner terpenuhi maka fungsi Hamiltonian mencapai solusi optimal.

1. Persamaan *state*

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda_{S_1}} = a - bS_1 - \beta S_1 \frac{I_1}{N_1} + \alpha_1 S_2 - \gamma \alpha_1 S_2 \frac{I_2}{N_2} - \alpha_1 S_1 + \alpha_2 R_1$$

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda_{I_1}} = \beta S_1 \frac{I_1}{N_1} + \gamma \alpha_1 S_2 \frac{I_2}{N_2} - (b + \alpha_1 + u)I_1 + \alpha_1 I_2$$

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda_{T_1}} = uI_1 - (b + d + \alpha_1)T_1 + \alpha_1 T_2$$

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda_{R_1}} = dT_1 - (b + \alpha_1 + \alpha_2)R_1 + \alpha_1 R_2$$

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda_{S_2}} = a - bS_2 - \beta S_2 \frac{I_2}{N_2} + \alpha_1 S_1 - \gamma \alpha_1 S_1 \frac{I_1}{N_1} - \alpha_1 S_2 + \alpha_2 R_2$$

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda_{I_2}} = \beta S_2 \frac{I_2}{N_2} + \gamma \alpha_1 S_1 \frac{I_1}{N_1} - (b + \alpha_1 + u)I_2 + \alpha_1 I_1$$

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda_{T_2}} = uI_2 - (b + d + \alpha_1)T_2 + \alpha_1 T_1$$

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda_{R_2}} = dT_2 - (b + \alpha_1 + \alpha_2)R_2 + \alpha_1 R_1$$

2. Persamaan *costate*

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda_{S_1}}{dt} &= -\left(\frac{\partial H}{\partial S_1}\right) \\ &= -\left(-b\lambda_{S_1} - (\lambda_{S_1} - \lambda_{I_1})\left(\frac{\beta I_1(I_1 + T_1 + R_1)}{N_1^2}\right) \right. \\ &\quad \left. - (\lambda_{S_2} - \lambda_{I_2})\left(\frac{\gamma \alpha_1 I_1(I_1 + T_1 + R_1)}{N_1^2}\right) \right. \\ &\quad \left. - (\lambda_{S_1} - \lambda_{S_2})\alpha_1\right) \\ &= (\lambda_{S_1} - \lambda_{I_1})\left(\frac{\beta I_1(I_1 + T_1 + R_1)}{N_1^2}\right) \\ &\quad + (\lambda_{S_2} - \lambda_{I_2})\left(\frac{\gamma \alpha_1 I_1(I_1 + T_1 + R_1)}{N_1^2}\right) + b\lambda_{S_1} \\ &\quad + (\lambda_{S_1} - \lambda_{S_2})\alpha_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d\lambda_{I_1}}{dt} &= -\left(\frac{\partial H}{\partial I_1}\right) \\
&= -\left(1 - (\lambda_{S_1} - \lambda_{I_1})\left(\frac{\beta S_1(S_1 + T_1 + R_1)}{N_1^2}\right) - (\lambda_{I_1} - \lambda_{T_1})u - b\lambda_{I_1}\right. \\
&\quad \left.- (\lambda_{S_2} - \lambda_{I_2})\left(\frac{\gamma\alpha_1 S_1(S_1 + T_1 + R_1)}{N_1^2}\right) - (\lambda_{I_1} - \lambda_{I_2})\alpha_1\right) \\
&= -1 + (\lambda_{S_1} - \lambda_{I_1})\left(\frac{\beta S_1(S_1 + T_1 + R_1)}{N_1^2}\right) \\
&\quad + (\lambda_{S_2} - \lambda_{I_2})\left(\frac{\gamma\alpha_1 S_1(S_1 + T_1 + R_1)}{N_1^2}\right) + (\lambda_{I_1} - \lambda_{T_1})u \\
&\quad + b\lambda_{I_1} + (\lambda_{I_1} - \lambda_{I_2})\alpha_1 \\
\frac{d\lambda_{T_1}}{dt} &= -\left(\frac{\partial H}{\partial T_1}\right) \\
&= -\left(-(\lambda_{I_1} - \lambda_{S_1})\left(\frac{\beta S_1 I_1}{N_1^2}\right) - (\lambda_{I_2} - \lambda_{S_2})\left(\frac{\gamma\alpha_1 S_1 I_1}{N_1^2}\right) - (\lambda_{T_1} - \lambda_{R_1})d\right. \\
&\quad \left.- b\lambda_{T_1} - (\lambda_{T_1} - \lambda_{T_2})\alpha_1\right) \\
&= (\lambda_{I_1} - \lambda_{S_1})\left(\frac{\beta S_1 I_1}{N_1^2}\right) + (\lambda_{I_2} - \lambda_{S_2})\left(\frac{\gamma\alpha_1 S_1 I_1}{N_1^2}\right) + (\lambda_{T_1} - \lambda_{R_1})d \\
&\quad + b\lambda_{T_1} + (\lambda_{T_1} - \lambda_{T_2})\alpha_1 \\
\frac{d\lambda_{R_1}}{dt} &= -\left(\frac{\partial H}{\partial R_1}\right) \\
&= -\left(-(\lambda_{I_1} - \lambda_{S_1})\left(\frac{\beta S_1 I_1}{N_1^2}\right) - (\lambda_{I_2} - \lambda_{S_2})\left(\frac{\gamma\alpha_1 S_1 I_1}{N_1^2}\right) - (\lambda_{R_1} - \lambda_{S_1})\alpha_2\right. \\
&\quad \left.- b\lambda_{R_1} - (\lambda_{R_1} - \lambda_{R_2})\alpha_1\right) \\
&= (\lambda_{I_1} - \lambda_{S_1})\left(\frac{\beta S_1 I_1}{N_1^2}\right) + (\lambda_{I_2} - \lambda_{S_2})\left(\frac{\gamma\alpha_1 S_1 I_1}{N_1^2}\right) + (\lambda_{R_1} - \lambda_{S_1})\alpha_2 \\
&\quad + b\lambda_{R_1} + (\lambda_{R_1} - \lambda_{R_2})\alpha_1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d\lambda_{S_2}}{dt} &= -\left(\frac{\partial H}{\partial S_2}\right) \\
&= -\left(-b\lambda_{S_2} - (\lambda_{S_1} - \lambda_{I_1})\left(\frac{\gamma\alpha_1 I_2(I_2 + T_2 + R_2)}{N_2^2}\right) \right. \\
&\quad \left. - (\lambda_{S_2} - \lambda_{I_2})\left(\frac{\beta I_2(I_2 + T_2 + R_2)}{N_2^2}\right) - (\lambda_{S_2} - \lambda_{S_1})\alpha_1\right) \\
&= (\lambda_{S_1} - \lambda_{I_1})\left(\frac{\gamma\alpha_1 I_2(I_2 + T_2 + R_2)}{N_2^2}\right) \\
&\quad + (\lambda_{S_2} - \lambda_{I_2})\left(\frac{\beta I_2(I_2 + T_2 + R_2)}{N_2^2}\right) + b\lambda_{S_2} \\
&\quad + (\lambda_{S_2} - \lambda_{S_1})\alpha_1 \\
\frac{d\lambda_{I_2}}{dt} &= -\left(\frac{\partial H}{\partial I_2}\right) \\
&= -\left(1 - (\lambda_{S_1} - \lambda_{I_1})\left(\frac{\gamma\alpha_1 S_2(S_2 + T_2 + R_2)}{N_2^2}\right) - (\lambda_{I_2} - \lambda_{T_2})u - b\lambda_{I_2} \right. \\
&\quad \left. - (\lambda_{S_2} - \lambda_{I_2})\left(\frac{\beta S_2(S_2 + T_2 + R_2)}{N_2^2}\right) - (\lambda_{I_2} - \lambda_{I_1})\alpha_1\right) \\
&= -1 + (\lambda_{S_1} - \lambda_{I_1})\left(\frac{\gamma\alpha_1 S_2(S_2 + T_2 + R_2)}{N_2^2}\right) + (\lambda_{I_2} - \lambda_{T_2})u + b\lambda_{I_2} \\
&\quad + (\lambda_{S_2} - \lambda_{I_2})\left(\frac{\beta S_2(S_2 + T_2 + R_2)}{N_2^2}\right) + (\lambda_{I_2} - \lambda_{I_1})\alpha_1 \\
\frac{d\lambda_{T_2}}{dt} &= -\left(\frac{\partial H}{\partial T_2}\right) \\
&= -\left(-(\lambda_{I_1} - \lambda_{S_1})\left(\frac{\gamma\alpha_1 S_2 I_2}{N_2^2}\right) - (\lambda_{I_2} - \lambda_{S_2})\left(\frac{\beta S_2 I_2}{N_2^2}\right) \right. \\
&\quad \left. - (\lambda_{T_2} - \lambda_{R_2})d - b\lambda_{T_2} - (\lambda_{T_2} - \lambda_{T_1})\alpha_1\right) \\
&= (\lambda_{I_1} - \lambda_{S_1})\left(\frac{\gamma\alpha_1 S_2 I_2}{N_2^2}\right) + (\lambda_{I_2} - \lambda_{S_2})\left(\frac{\beta S_2 I_2}{N_2^2}\right) + (\lambda_{T_2} - \lambda_{R_2})d \\
&\quad + b\lambda_{T_2} + (\lambda_{T_2} - \lambda_{T_1})\alpha_1 \\
\frac{d\lambda_{R_2}}{dt} &= -\left(\frac{\partial H}{\partial R_2}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= - \left(-(\lambda_{I_1} - \lambda_{S_1}) \left(\frac{\gamma \alpha_1 S_2 I_2}{N_2^2} \right) - (\lambda_{I_2} - \lambda_{S_2}) \left(\frac{\beta S_2 I_2}{N_2^2} \right) \right. \\
&\quad \left. - (\lambda_{R_2} - \lambda_{S_2}) \alpha_2 - b \lambda_{R_2} - (\lambda_{R_2} - \lambda_{R_1}) \alpha_1 \right) \\
&= (\lambda_{I_1} - \lambda_{S_1}) \left(\frac{\gamma \alpha_1 S_2 I_2}{N_2^2} \right) + (\lambda_{I_2} - \lambda_{S_2}) \left(\frac{\beta S_2 I_2}{N_2^2} \right) + (\lambda_{R_2} - \lambda_{S_2}) \alpha_2 \\
&\quad + b \lambda_{R_2} + (\lambda_{R_2} - \lambda_{R_1}) \alpha_1
\end{aligned}$$

3. Kondisi stasioner

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0$$

$$Au - I_1 \lambda_{I_1} + I_1 \lambda_{T_1} - I_2 \lambda_{I_2} + I_2 \lambda_{T_2} = 0$$

$$Au = I_1 \lambda_{I_1} - I_1 \lambda_{T_1} + I_2 \lambda_{I_2} - I_2 \lambda_{T_2}$$

$$u = \frac{(\lambda_{I_1} - \lambda_{T_1}) I_1 + (\lambda_{I_2} - \lambda_{T_2}) I_2}{A}$$

Karena $0 \leq u(t) \leq 0.9$ sehingga

$$u^*(t) = \begin{cases} 0 & , u(t) \leq 0 \\ u(t) & , 0 < u(t) < 0.9 \\ 0.9 & , u(t) \geq 0.9 \end{cases}$$

Jadi, kontrol optimal $u^*(t)$ dapat dicirikan sebagai

$$u^*(t) = \min(0.9, \max(0, u^*(t)))$$

atau

$$u^*(t) = \min \left(0.9, \max \left(0, \frac{(\lambda_{I_1} - \lambda_{T_1}) I_1 + (\lambda_{I_2} - \lambda_{T_2}) I_2}{A} \right) \right)$$

Sistem optimal diperoleh dengan memasukkan $u^*(t)$ ke sistem persamaan *state* dan persamaan *costate* sehingga diperoleh sistem yang optimal sebagai berikut.

$$\frac{\partial S_1^*}{\partial t} = a - b S_1^* - \beta S_1^* \frac{I_1^*}{N_1^*} + \alpha_1 S_2^* - \gamma \alpha_1 S_2^* \frac{I_2^*}{N_2^*} - \alpha_1 S_1^* + \alpha_2 R_1^* \quad (4.36.a)$$

$$\frac{\partial I_1^*}{\partial t} = \beta S_1^* \frac{I_1^*}{N_1^*} + \gamma \alpha_1 S_2^* \frac{I_2^*}{N_2^*} - (b + \alpha_1 + u^*) I_1^* + \alpha_1 I_2^* \quad (4.36.b)$$

$$\frac{\partial T_1^*}{\partial t} = u^* I_1^* - (b + d + \alpha_1) T_1^* + \alpha_1 T_2^* \quad (4.36.c)$$

$$\frac{\partial R_1^*}{\partial t} = dT_1^* - (b + \alpha_1 + \alpha_2)R_1^* + \alpha_1 R_2^* \quad (4.36.d)$$

$$\frac{\partial S_2^*}{\partial t} = a - bS_2^* - \beta S_2^* \frac{I_2^*}{N_2^*} + \alpha_1 S_1^* - \gamma \alpha_1 S_1^* \frac{I_1^*}{N_1^*} - \alpha_1 S_2^* + \alpha_2 R_2^* \quad (4.36.e)$$

$$\frac{\partial I_2^*}{\partial t} = \beta S_2^* \frac{I_2^*}{N_2^*} + \gamma \alpha_1 S_1^* \frac{I_1^*}{N_1^*} - (b + \alpha_1 + u^*)I_2^* + \alpha_1 I_1^* \quad (4.36.f)$$

$$\frac{\partial T_2^*}{\partial t} = u^* I_2^* - (b + d + \alpha_1)T_2^* + \alpha_1 T_1^* \quad (4.36.g)$$

$$\frac{\partial R_2^*}{\partial t} = dT_2^* - (b + \alpha_1 + \alpha_2)R_2^* + \alpha_1 R_1^* \quad (4.36.h)$$

Kondisi batas $S_1(0) = S_{10}$, $I_1(0) = I_{10}$, $T_1(0) = T_{10}$, $R_1(0) = R_{10}$, $S_2(0) = S_{20}$, $I_2(0) = I_{20}$, $T_2(0) = T_{20}$, $R_2(0) = R_{20}$.

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda_{S_1}}{dt} = & (\lambda_{S_1} - \lambda_{I_1}) \left(\frac{\beta I_1^* (I_1^* + T_1^* + R_1^*)}{N_1^{*2}} \right) \\ & + (\lambda_{S_2} - \lambda_{I_2}) \left(\frac{\gamma \alpha_1 I_1^* (I_1^* + T_1^* + R_1^*)}{N_1^{*2}} \right) + b\lambda_{S_1} \\ & + (\lambda_{S_1} - \lambda_{S_2})\alpha_1 \end{aligned} \quad (4.37.a)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda_{I_1}}{dt} = & -1 + (\lambda_{S_1} - \lambda_{I_1}) \left(\frac{\beta S_1^* (S_1^* + T_1^* + R_1^*)}{N_1^{*2}} \right) \\ & + (\lambda_{S_2} - \lambda_{I_2}) \left(\frac{\gamma \alpha_1 S_1^* (S_1^* + T_1^* + R_1^*)}{N_1^{*2}} \right) + (\lambda_{I_1} - \lambda_{T_1})u \\ & + b\lambda_{I_1} + (\lambda_{I_1} - \lambda_{I_2})\alpha_1 \end{aligned} \quad (4.37.b)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda_{T_1}}{dt} = & (\lambda_{I_1} - \lambda_{S_1}) \left(\frac{\beta S_1^* I_1^*}{N_1^{*2}} \right) + (\lambda_{I_2} - \lambda_{S_2}) \left(\frac{\gamma \alpha_1 S_1^* I_1^*}{N_1^{*2}} \right) \\ & + (\lambda_{T_1} - \lambda_{R_1})d + b\lambda_{T_1} + (\lambda_{T_1} - \lambda_{T_2})\alpha_1 \end{aligned} \quad (4.37.c)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda_{R_1}}{dt} = & (\lambda_{I_1} - \lambda_{S_1}) \left(\frac{\beta S_1^* I_1^*}{N_1^{*2}} \right) + (\lambda_{I_2} - \lambda_{S_2}) \left(\frac{\gamma \alpha_1 S_1^* I_1^*}{N_1^{*2}} \right) \\ & + (\lambda_{R_1} - \lambda_{S_1})\alpha_2 + b\lambda_{R_1} + (\lambda_{R_1} - \lambda_{R_2})\alpha_1 \end{aligned} \quad (4.37.d)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda_{S_2}}{dt} = & (\lambda_{S_1} - \lambda_{I_1}) \left(\frac{\gamma \alpha_1 I_2^* (I_2^* + T_2^* + R_2^*)}{N_2^{*2}} \right) \\ & + (\lambda_{S_2} - \lambda_{I_2}) \left(\frac{\beta I_2^* (I_2^* + T_2^* + R_2^*)}{N_2^{*2}} \right) + b\lambda_{S_2} \\ & + (\lambda_{S_2} - \lambda_{S_1})\alpha_1 \end{aligned} \quad (4.37.e)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda_{I_2}}{dt} = & -1 + (\lambda_{S_1} - \lambda_{I_1}) \left(\frac{\gamma \alpha_1 S_2^* (S_2^* + T_2^* + R_2^*)}{N_2^{*2}} \right) + (\lambda_{I_2} - \lambda_{T_2})u \\ & + b\lambda_{I_2} + (\lambda_{S_2} - \lambda_{I_2}) \left(\frac{\beta S_2^* (S_2^* + T_2^* + R_2^*)}{N_2^{*2}} \right) \\ & + (\lambda_{I_2} - \lambda_{I_1})\alpha_1 \end{aligned} \quad (4.37.f)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda_{T_2}}{dt} = & (\lambda_{I_1} - \lambda_{S_1}) \left(\frac{\gamma \alpha_1 S_2^* I_2^*}{N_2^{*2}} \right) + (\lambda_{I_2} - \lambda_{S_2}) \left(\frac{\beta S_2^* I_2^*}{N_2^{*2}} \right) \\ & + (\lambda_{T_2} - \lambda_{R_2})d + b\lambda_{T_2} + (\lambda_{T_2} - \lambda_{T_1})\alpha_1 \end{aligned} \quad (4.37.g)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda_{R_2}}{dt} = & (\lambda_{I_1} - \lambda_{S_1}) \left(\frac{\gamma \alpha_1 S_2^* I_2^*}{N_2^{*2}} \right) + (\lambda_{I_2} - \lambda_{S_2}) \left(\frac{\beta S_2^* I_2^*}{N_2^{*2}} \right) \\ & + (\lambda_{R_2} - \lambda_{S_2})\alpha_2 + b\lambda_{R_2} + (\lambda_{R_2} - \lambda_{R_1})\alpha_1 \end{aligned} \quad (4.37.h)$$

Kondisi batas $\lambda_{S_1}(t_f) = 0$, $\lambda_{I_1}(t_f) = 0$, $\lambda_{T_1}(t_f) = 0$, $\lambda_{R_1}(t_f) = 0$, $\lambda_{S_2}(t_f) = 0$, $\lambda_{I_2}(t_f) = 0$, $\lambda_{T_2}(t_f) = 0$, $\lambda_{R_2}(t_f) = 0$.

4.3 Simulasi Numerik

Pada bagian ini dilakukan simulasi dengan menggunakan *software* Matlab untuk melihat perubahan banyaknya individu di masing-masing populasi pada saat $\mathcal{R}_0 < 1$, $\mathcal{R}_0 > 1$, eksistensi titik kesetimbangan, dan pengaruh perpindahan individu antarwilayah terhadap penyebaran penyakit. Selanjutnya mengetahui efektivitas pemberian kontrol pengobatan pada populasi *infected*. Metode yang digunakan pada simulasi ini adalah metode Runge-Kutta Orde Empat (RK4) dan metode Sweep Maju-Mundur. Adapaun *Source code* program dapat dilihat pada Lampiran.

4.3.1 Simulasi Numerik Ketika $\mathcal{R}_0 < 1$

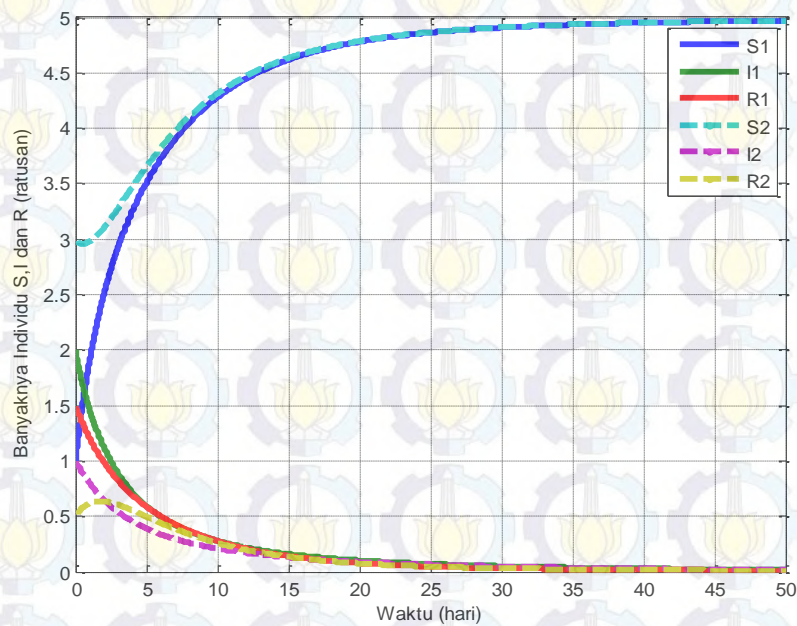
Untuk simulasi numerik saat kondisi $\mathcal{R}_0 < 1$, yang artinya setiap individu yang terinfeksi memproduksi kurang dari satu individu terinfeksi baru, dengan kata lain dapat diprediksi bahwa infeksi akan bersih dari populasi. Nilai parameter yang digunakan merujuk pada (Liu & Zhou, 2009) yang dilampirkan pada Tabel 4.1 dan model disimulasikan saat kondisi awal $(S_1, I_1, R_1, S_2, I_2, R_2) = (1, 2, 1.5, 3, 1, 0.5)$.

Tabel 4.1 Nilai parameter yang digunakan dalam simulasi

Parameter	Nilai
a	1
b	0.2
d	0.1
β	0.25
γ	0.01
α_1	0.02
α_2	0.03

Dari nilai-nilai parameter pada Tabel 4.1, didapatkan

$$\mathcal{R}_0 = \frac{\beta + \gamma\alpha_1}{b + d} = \frac{0.25 + (0.01)(0.02)}{0.2 + 0.1} = 0.384.$$



Gambar 4.3 Perubahan banyaknya individu pada model I untuk $\mathcal{R}_0 < 1$

Dari Gambar 4.3 diketahui dengan kondisi awal yang berbeda, populasi *susceptible*, *infected*, dan *removed* dari kedua wilayah stabil asimtotik dan memperlihatkan bahwa solusi konvergen ke titik kesetimbangan bebas penyakit $E_a^0 = (5,0,0)$. Hal tersebut sesuai dengan perhitungan yang menunjukkan jika $\mathcal{R}_0 < 1$ maka titik kesetimbangan bebas penyakit bersifat stabil asimtotik.

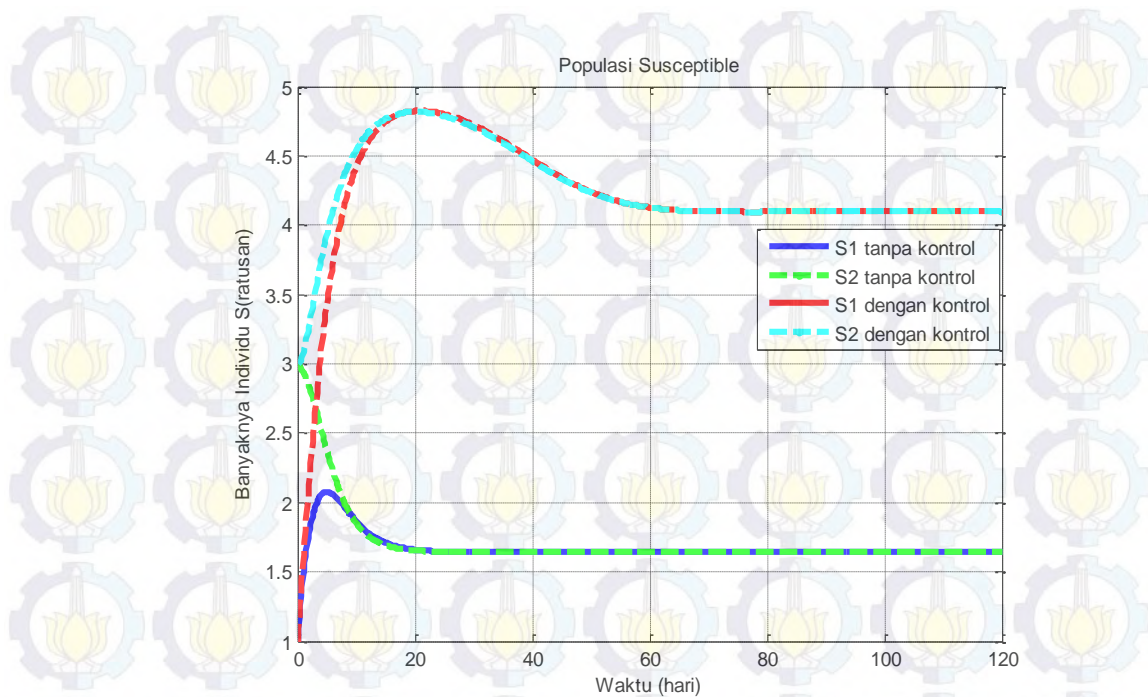
Banyaknya individu *susceptible* terus bertambah. Hal tersebut disebabkan oleh tingginya tingkat kelahiran dan menurunnya daya tahan tubuh pada individu *removed*. Disisi lain, adanya kematian alami akan menyebabkan banyaknya individu *infected* dan *removed* semakin berkurang. Sehingga pada akhirnya populasi akan menuju titik kesetimbangan bebas penyakit $E_a^0 = (5,0,0)$.

4.3.2 Simulasi Numerik Ketika $\mathcal{R}_0 > 1$

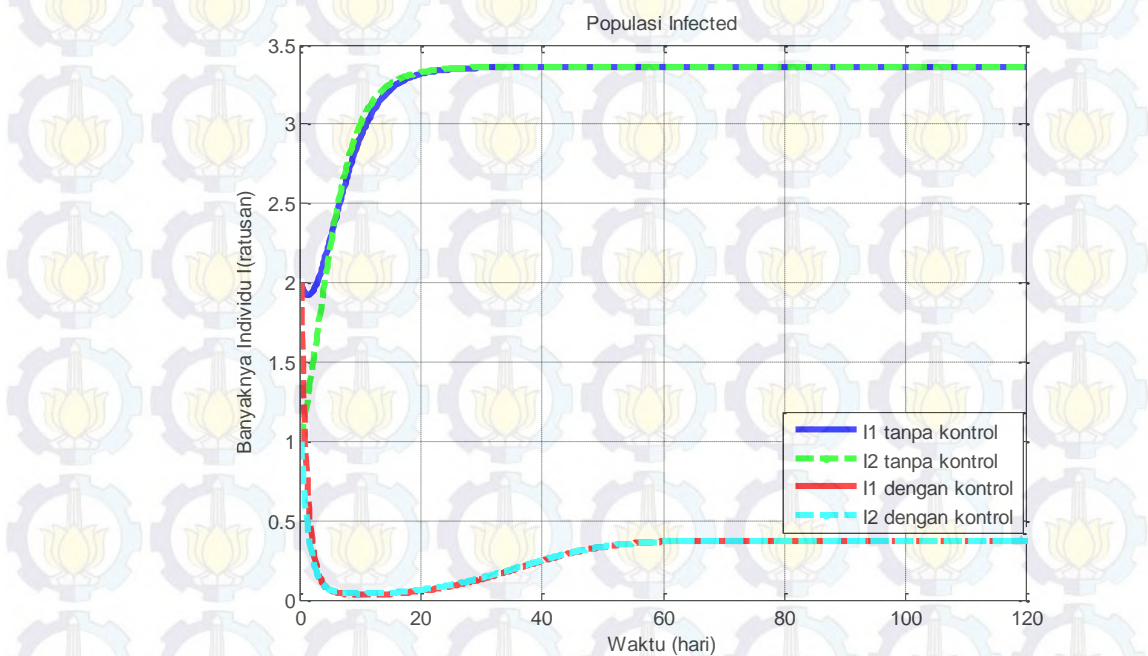
Untuk simulasi numerik saat kondisi $\mathcal{R}_0 > 1$, yang artinya individu yang terinfeksi memproduksi lebih dari satu individu terinfeksi baru, dengan kata lain dapat diprediksi bahwa infeksi akan menyebar pada populasi. Nilai parameter yang digunakan diberikan pada Tabel 4.1 dengan memperbesar nilai parameter β menjadi 0.6. Kemudian simulasi yang dilakukan pada kondisi $\mathcal{R}_0 > 1$ adalah menunjukkan pengaruh kontrol pengobatan yang dilakukan pada populasi *infected*. Selanjutnya populasi *susceptible*, *infected*, *treatment*, dan *removed* dibuat simulasi perubahan banyaknya individu ketika sebelum dan setelah diberikan kontrol pengobatan.

a. Populasi *Susceptible*

Berdasarkan Gambar 4.4 dengan kondisi awal yang berbeda untuk wilayah 1 dan wilayah 2, diketahui bahwa banyaknya individu *susceptible* tanpa kontrol pengobatan di kedua wilayah mengalami peningkatan dan penurunan sampai akhirnya stabil mulai hari ke-25 dengan jumlah 166 individu. kemudian setelah diberikannya kontrol pengobatan pada individu *infected*, banyaknya individu *susceptible* mengalami peningkatan dan stabil mulai hari ke-70 dengan jumlah 411 individu. Hal ini diakibatkan banyaknya individu yang sembuh atau terbebas dari infeksi setelah diberikan pengobatan sebanyak 245 individu.



Gambar 4.4 Perbandingan perubahan banyaknya individu susceptible tanpa dan dengan kontrol



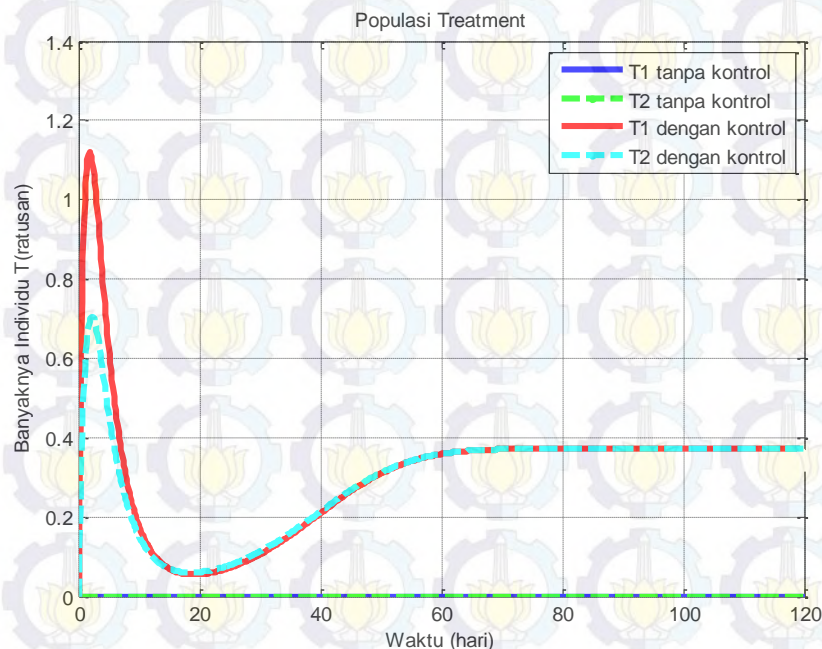
Gambar 4.5 Perbandingan perubahan banyaknya individu *infected* tanpa dan dengan kontrol

b. Populasi *Infected*

Berdasarkan Gambar 4.5 dengan kondisi awal yang berbeda untuk wilayah 1 dan wilayah 2, diketahui bahwa banyaknya individu *infected* tanpa kontrol pengobatan di kedua wilayah mengalami peningkatan sampai akhirnya stabil mulai hari ke-25 dengan jumlah 334 individu. Meningkatnya populasi *infected* mengakibatkan menurunnya populasi *susceptible* dikarenakan terjadinya kontak antara individu *susceptible* dengan individu *infected*. kemudian setelah diberikannya kontrol pengobatan banyaknya individu *infected* mengalami penurunan dan stabil mulai hari ke-70 dengan jumlah 40 individu. Hal ini diakibatkan karena pengaruh kontrol pengobatan yang tinggi pada hari pertama sampai hari ke-5.

c. Populasi *Treatment*

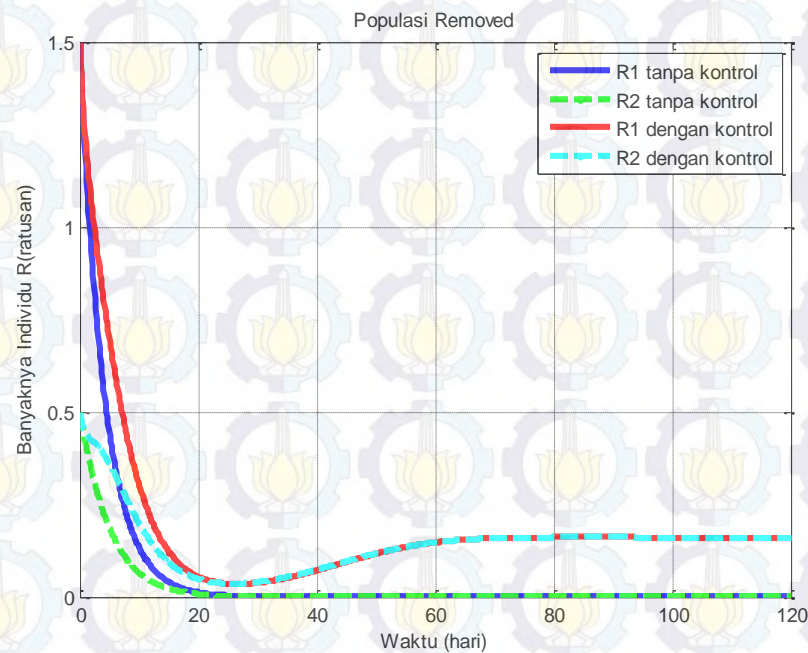
Berdasarkan Gambar 4.6 diketahui bahwa banyaknya individu *treatment* tanpa pengobatan adalah 0, dikarenakan belum dilakukan proses pengobatan. Kemudian banyaknya individu *treatment* setelah dikontrol mengalami kenaikan sampai hari ke-5 dan mengalami penurunan sampai hari ke-20 dan stabil dengan jumlah 39 individu. Hal ini sesuai dengan kontrol yang dilakukan pada Gambar 4.8.



Gambar 4.6 Perbandingan perubahan banyaknya individu *treatment* tanpa dan dengan kontrol

d. Populasi *Removed*

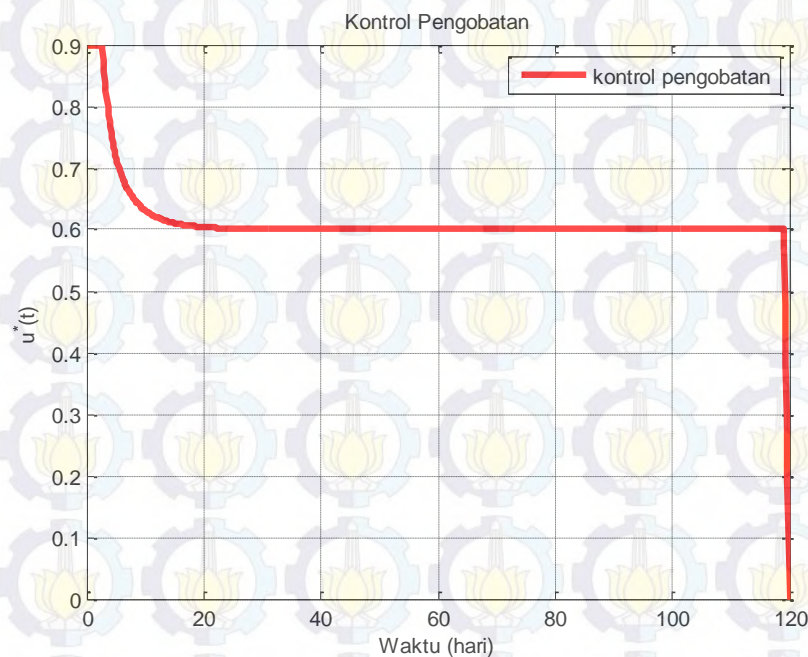
Gambar 4.7 menunjukkan bahwa akibat tidak adanya pengobatan, maka tetap tidak ada individu *removed* karena pada populasi *treatment* yang tanpa kontrol juga berjumlah 0. Kemudian banyaknya individu setelah diberikan kontrol mengalami peningkatan dan stabil dengan jumlah 10 individu. Hal ini menunjukkan bahwa setelah diberikan kontrol pengobatan maka terdapat individu yang sembuh.



Gambar 4.7 Perbandingan perubahan banyaknya individu *removed* tanpa dan dengan kontrol

e. Kontrol Pengobatan

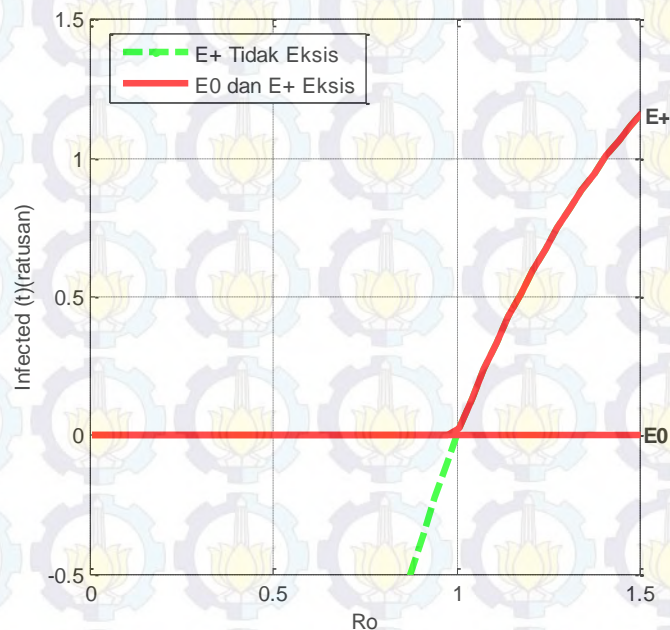
Berdasarkan Gambar 4.8 kontrol optimal dilakukan pada hari pertama sampai hari ke-5, setelah itu mengalami penurunan dan stabil di 0.6 mulai hari ke-20. Dari kontrol yang telah dilakukan mengakibatkan berkurangnya jumlah individu pada populasi *infected* dan bertambahnya individu *susceptible*, *treatment*, dan *removed*.



Gambar 4.8 Kontrol pengobatan

4.3.3 Eksistensi Titik kesetimbangan

Pada Gambar 4.9 ditunjukkan eksistensi titik kesetimbangan berdasarkan bilangan reproduksi dasar. Jika $\mathcal{R}_0 < 1$ diketahui hanya titik kesetimbangan bebas penyakit yang eksis yang diperlihatkan pada garis berwarna merah, sedangkan titik kesetimbangan endemi tidak eksis dikarenakan jumlah individu pada populasi endemi bernilai negatif yang diperlihatkan pada garis berwarna hijau putus-putus. Sedangkan jika $\mathcal{R}_0 > 1$ diketahui titik kesetimbangan bebas penyakit dan endemi keduanya eksis. Sedangkan jika $\mathcal{R}_0 = 1$ maka terjadi bifurkasi yang dapat didefinisikan sebagai perubahan stabilitas dan banyaknya titik kesetimbangan yang diakibatkan oleh perubahan parameter, dan $\mathcal{R}_0 = 1$ disebut titik bifurkasi dimana fenomena sebuah sistem terbagai kedalam dua kemungkinan perilaku akibat perubahan parameter. Hasil simulasi ini sesuai dengan hasil perhitungan yang telah diperoleh sebelumnya.

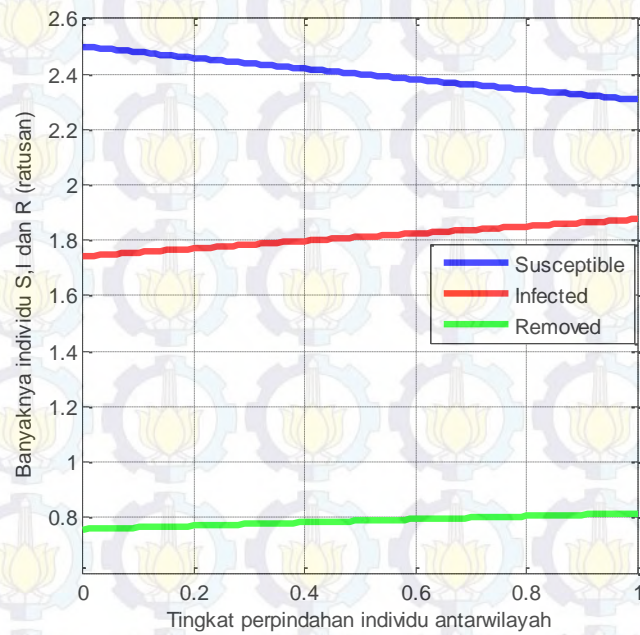


Gambar 4.9 Eksistensi Titik Keseimbangan

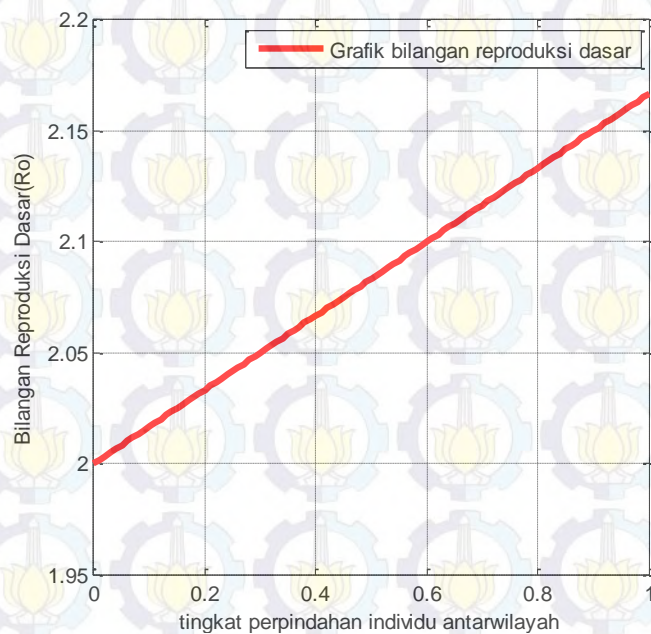
4.3.4 Pengaruh Perpindahan Individu Antarwilayah

Untuk mengetahui pengaruh perpindahan individu antarwilayah terhadap penyebaran penyakit menular dilakukan simulasi ketika parameter α_1 berjalan dari 0 menuju 1 pada titik keseimbangan endemi ($\mathcal{R}_0 > 1$),

Untuk simulasi pengaruh perpindahan individu antarwilayah, digunakan nilai parameter pada Tabel 4.1 dan $\alpha_1 = [0,1]$. Dari Gambar 4.10 diketahui bahwa ketika $\alpha_1 = 0$ banyaknya individu di populasi *susceptible*, *infected*, dan *removed* secara berturut-turut adalah 250 individu, 174 individu dan 76 individu. Akan tetapi, semakin meningkatnya α_1 mengakibatkan populasi *infected* mengalami peningkatan dan populasi *susceptible* mengalami penurunan. Perubahan α_1 juga mengakibatkan meningkatnya nilai dari bilangan reproduksi dasar (\mathcal{R}_0) seperti pada Gambar 4.11. Jika bilangan reproduksi dasar semakin meningkat maka dapat diartikan bahwa rata-rata individu yang terinfeksi menghasilkan individu terinfeksi baru dikarenakan terjadinya kontak antara individu *susceptible* dengan individu *infected*. Dari Gambar 4.10 dan 4.11 dapat disimpulkan bahwa individu yang terinfeksi diharapkan agar tidak melakukan perjalanan antarwilayah.



Gambar 4.10 Pengaruh perpindahan individu antarwilayah terhadap populasi



Gambar 4.11 Pengaruh perpindahan individu antarwilayah terhadap \mathcal{R}_0

BAB 5

KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil dan pembahasan pada penulisan tesis ini, maka dapat diambil kesimpulan sebagai berikut.

1. Dengan mempelajari fenomena yang ada dan diberikan beberapa asumsi, diperoleh model penyebaran penyakit menular antar dua wilayah dengan dua kasus. Model I dan II berupa sistem persamaan diferensial nonlinear.

Model I tidak terdapat kontrol pengobatan, yaitu

$$\frac{dS_1}{dt} = a - bS_1 - \beta S_1 \frac{I_1}{N_1} - \alpha_1 S_1 + \alpha_1 S_2 - \gamma \alpha_1 S_2 \frac{I_2}{N_2} + \alpha_2 R_1,$$

$$\frac{dI_1}{dt} = \beta S_1 \frac{I_1}{N_1} + \gamma \alpha_1 S_2 \frac{I_2}{N_2} - (b + \alpha_1 + d)I_1 + \alpha_1 I_2,$$

$$\frac{dR_1}{dt} = dI_1 - (b + \alpha_1 + \alpha_2)R_1 + \alpha_1 R_2,$$

$$\frac{dS_2}{dt} = a - bS_2 - \beta S_2 \frac{I_2}{N_2} - \alpha_1 S_2 + \alpha_1 S_1 - \gamma \alpha_1 S_1 \frac{I_1}{N_1} + \alpha_2 R_2,$$

$$\frac{dI_2}{dt} = \beta S_2 \frac{I_2}{N_2} + \gamma \alpha_1 S_1 \frac{I_1}{N_1} - (b + \alpha_1 + d)I_2 + \alpha_1 I_1,$$

$$\frac{dR_2}{dt} = dI_2 - (b + \alpha_1 + \alpha_2)R_2 + \alpha_1 R_1.$$

sedangkan model II terdapat kontrol pengobatan pada populasi *infected*, yaitu

$$\frac{dS_1}{dt} = a - bS_1 - \beta S_1 \frac{I_1}{N_1} - \alpha_1 S_1 + \alpha_1 S_2 - \gamma \alpha_1 S_2 \frac{I_2}{N_2} + \alpha_2 R_1,$$

$$\frac{dI_1}{dt} = \beta S_1 \frac{I_1}{N_1} + \gamma \alpha_1 S_2 \frac{I_2}{N_2} - (b + \alpha_1 + u)I_1 + \alpha_1 I_2,$$

$$\frac{dT_1}{dt} = uI_1 - (b + d + \alpha_1)T_1 + \alpha_1 T_2,$$

$$\frac{dR_1}{dt} = dT_1 - (b + \alpha_1 + \alpha_2)R_1 + \alpha_1 R_2,$$

$$\frac{dS_2}{dt} = a - bS_2 - \beta S_2 \frac{I_2}{N_2} - \alpha_1 S_2 + \alpha_1 S_1 - \gamma \alpha_1 S_1 \frac{I_1}{N_1} + \alpha_2 R_2,$$

$$\frac{dI_2}{dt} = \beta S_2 \frac{I_2}{N_2} + \gamma \alpha_1 S_1 \frac{I_1}{N_1} - (b + \alpha_1 + u)I_2 + \alpha_1 I_1,$$

$$\frac{dT_2}{dt} = uI_2 - (b + d + \alpha_1)T_2 + \alpha_1 T_1,$$

$$\frac{dR_2}{dt} = dT_2 - (b + \alpha_1 + \alpha_2)R_2 + \alpha_1 R_1.$$

2. Model I dan II memiliki dua titik kesetimbangan, yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit dan titik kesetimbangan endemi. Syarat eksistensi dan kestabilan kedua titik kesetimbangan tersebut adalah sebagai berikut.

- a. Jika $\mathcal{R}_0 < 1$ maka titik kesetimbangan bebas penyakit eksis dan bersifat stabil asimtotik, artinya setiap individu yang terinfeksi memproduksi kurang dari satu individu terinfeksi baru, dengan kata lain dapat diprediksi bahwa infeksi akan bersih dari populasi.
- b. Jika $\mathcal{R}_0 > 1$ maka kedua titik kesetimbangan eksis, akan tetapi titik kesetimbangan endemi bersifat stabil asimtotik dan titik kesetimbangan bebas penyakit tidak stabil, artinya setiap individu yang terinfeksi memproduksi lebih dari satu individu terinfeksi baru, dengan kata lain dapat diprediksi bahwa infeksi akan menyebar pada populasi.

3. Untuk mendapatkan kontrol optimal dibentuk fungsi Hamiltonian yang memenuhi persamaan *state*, *costate*, dan kondisi stasioner sesuai prinsip Pontryagin dan didapatkan kontrol optimal sebagai berikut

$$u^*(t) = \min \left(0.9, \max \left(0, \frac{(\lambda_{I_1} - \lambda_{T_1})I_1 + (\lambda_{I_2} - \lambda_{T_2})I_2}{A} \right) \right)$$

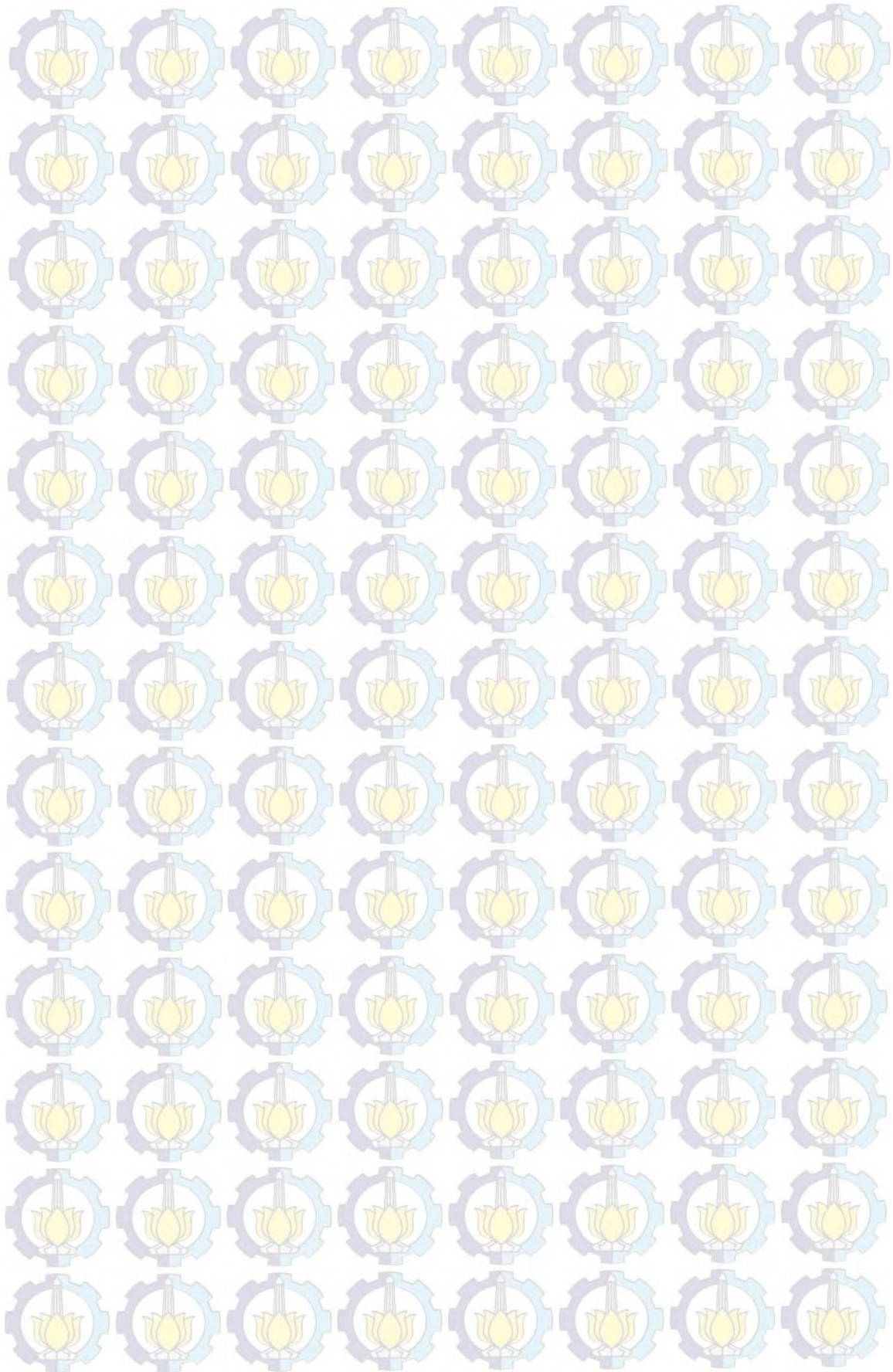
4. Hasil analisis yang didapatkan untuk pengaruh perpindahan individu antarwilayah adalah jika tingkat perpindahan individu antarwilayah semakin meningkat maka nilai bilangan reproduksi dasar juga semakin meningkat. Karena semakin meningkatnya bilangan reproduksi dasar maka rata-rata individu yang terinfeksi menghasilkan individu terinfeksi baru dikarenakan terjadinya kontak antara individu *susceptible* dengan individu *infected*, sehingga menyebabkan bertambahnya jumlah individu pada populasi *infected*. Hasil simulasi juga menunjukkan hasil yang sesuai dengan hasil analisis. Kemudian hasil dari kontrol optimal menunjukkan



keefektifan kontrol dalam mengendalikan penyebaran penyakit menular antar dua wilayah, yaitu dapat mengurangi jumlah individu *infected*.

5.2 Saran

Pada penulisan selanjutnya, hal yang dapat dikembangkan dari tesis ini adalah dengan menambahkan kontrol vaksinasi yang diberikan kepada individu *susceptible*. Selanjutnya membandingkan efektivitas kontrol vaksinasi dengan kontrol pengobatan.



DAFTAR PUSTAKA

Arino, J., & Driessche, P. v. (2003), "A Multi-City Epidemic Model", *Mathematical Population Studies*, Vol. 10, No.3, hal. 175-193.

Arino, J., Davis, J. R., Hartley, D., Jordan, R., & Driessche, P. v. (2005), "A Multi-Species Epidemic Model With Spatial Dynamics", *Mathematical Medicine and Biology*, Vol. 22, hal. 129-142.

Boyce, W. E., & DiPrima, R. C. (2009), *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*, 9th edition, John Wiley & Sons, Inc, United State of America.

Cui, J., Takeuchi, Y., & Saito, Y. (2006), "Spreading Disease With Transport-related Infection", *Journal of Theoretical Biology*, hal. 376-390.

DEPKES. (2005), *Pharmaceutical Care Untuk Penyakit Tuberkulosis*, Direktorat Bina Farmasi Komunitas dan Klinik.

Driessche, P. v., & Wetmough, J. (2002), "Reproduction Numbers and Sub-Threshold Endemic Equilibria for Compartmental Models of Disease Transmission", *Mathematical Biosciences*, Vol. 180, hal. 29-48.

Edwards, C. H., & Penney, D. E. (2008), *Differential Equations and Linear Algebra*, 6th edition, Prentice-Hall, New Jersey.

Kermack, W. O., & McKendrick, A. G. (1927), "A Contribution of the Mathematical Theory of Epidemics", *Proceedings of the Royal Society of london, Series A, Containing Papers of a mathematical and Physical Character*.115, hal. 700-721, The Royal Society.

Liu, J., & Zhou, Y. (2009), "Global stability of an SIRS epidemic model with transport-related infection", *Chaos Solitons & Fractals* , hal.145-158.

Liu, X., & Takeuchi, Y. (2006), "Spread of Disease with Transport-Related Infection and Entry Screening", *Journal of Theoretical Biology*, Vol. 242, hal. 517-528.

Murray, J. D. (2002), *Mathematical Biology : I. An Introduction, Third Edition* . Springer-Verlag, New York Berlin Heidelberg.

Nagle, R. K., Saff, E. B., & Snider, A. D. (2012), *Fundamental of Differential Equations and Boundary Value Problems, Sixth Edition*, Pearson Education, Inc, USA.

Naidu, D. S. (2002), *Optimal Control Systems*, New York.

Nurhayati. (2012), *Makalah Influenza*. <http://nurhayatimappa4.blogspot.com/2012/11/makalah-influenza.html>: 10 Juli 2015.

Sattenspiel, L., & Diez, K. (1995), "A Structured Epidemic Model Incorporating Geographic Mobility Among Regions", *Mathematical Biosciences*, Vol.128, hal. 71-91.

Wan, H., & Cui, J. (2007), "An SEIS Epidemic Model with Transport-related Infection". *Journal of Theoretical Biology*, hal. 507-524.

BIODATA PENULIS



Penulis yang memiliki nama lengkap Eko Alan Kusumayadi S.P.L lahir di Mataram, 16 Mei 1991. Penulis telah menempuh pendidikan formal mulai dari SD Negeri 08 Mataram, SMP Negeri 6 Mataram, dan SMA Negeri 2 Mataram. Setelah lulus dari SMA, penulis melanjutkan studi S1 di Jurusan Matematika Universitas Brawijaya Malang dan diterima sebagai mahasiswa angkatan 2009. Selama kuliah S1 di Jurusan Matematika penulis mengambil Bidang Minat Riset Operasi dan

Keuangan. Penulis lulus sarjana delapan semester dengan mendapat gelar Sarjana Sains. Penulis melanjutkan studi S2 di Jurusan Matematika Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya pada tahun 2013 dan mengambil Bidang Minat Pemodelan dan Simulasi. Untuk membentuk jaringan atau membutuhkan informasi yang berhubungan dengan tesis ini, penulis dapat dihubungi melalui email ekoalan1605@gmail.com.

LAMPIRAN

Lampiran 1 Source code program Model I

model_I.m	
1	clear all;
2	clc;
3	
4	a=1;
5	b=0.2;
6	d=0.1;
7	beta=0.25;
8	alpha1=0.2;
9	alpha2=0.03;
10	gamma=0.01;
11	
12	S1=1;
13	I1=2;
14	R1=1.5;
15	S2=3;
16	I2=1;
17	R2=0.5;
18	
19	h=0.001;
20	takhir=50;
21	za=[S1 I1 R1 S2 I2 R2];
22	[T,Y]=RK4(a,b,beta,gamma,alpha1,alpha2,d,@f,takhir,h,za);
23	figure(1);
24	plot(T,Y,'LineWidth',3);
25	legend('S1','I1','R1','S2','I2','R2');
26	xlabel('t');
27	ylabel('Jumlah Individu S(t),I(t) dan R(t)');
28	grid on
29	

Function Sistem model I

1	function y=f(a,b,beta,gamma,alpha1,alpha2,d,t,x)
2	y(1)=a-b*x(1)-(beta*x(1)*x(2))/(x(1)+x(2)+x(3))-
3	(gamma*alpha1*x(4)*x(5))/(x(4)+x(5)+x(6))+alpha2*x(3)-
4	alpha1*x(1)+alpha1*x(4);
5	y(2)=(beta*x(1)*x(2))/(x(1)+x(2)+x(3))+(gamma*alpha1*x(4)*
6	x(5))/(x(4)+x(5)+x(6))-(b+d)*x(2)-
7	alpha1*x(2)+alpha1*x(5);
8	y(3)= d*x(2)-(b+alpha2)*x(3)-alpha1*x(3)+alpha1*x(6);
9	y(4)=a-b*x(4)-(beta*x(4)*x(5))/(x(4)+x(5)+x(6))-
10	(gamma*alpha1*x(1)*x(2))/(x(1)+x(2)+x(3))+alpha2*x(6)-
11	alpha1*x(4)+alpha1*x(1);
12	y(5)=(beta*x(4)*x(5))/(x(4)+x(5)+x(6))+(gamma*alpha1*x(1)*
13	x(2))/(x(1)+x(2)+x(3))-(b+d)*x(2)-
14	alpha1*x(5)+alpha1*x(2);
15	y(6)= d*x(5)-(b+alpha2)*x(6)-alpha1*x(6)+alpha1*x(3);

Function RK4

```

1 function [T Y]=RK4(a,b,beta,gamma,alpha1,alpha2,d,f,ai,h,za)
2
3 t=0:h:ai;
4 N=length(t);
5 w=length(za);
6 x=zeros(N,w);
7 x(1,:)=za;
8 for i=1:N-1
9     k1=h*f(a,b,beta,gamma,alpha1,alpha2,d,t(i),x(i,:));
10    k2=h*f(a,b,beta,gamma,alpha1,alpha2,d,t(i)+h/2,x(i,:)+k1/2);
11    k3=h*f(a,b,beta,gamma,alpha1,alpha2,d,t(i)+h/2,x(i,:)+k2/2);
12    k4=h*f(a,b,beta,gamma,alpha1,alpha2,d,t(i+1),x(i,:)+k3);
13    x(i+1,:)=x(i,:)+(k1+2*k2+2*k3+k4)/6;
14 end;
15 T=t';
16 Y=x;

```

Lampiran 2 *Source code* pengaruh perpindahan individu antarwilayah.

Perpindahan_individu.m

```

1 clear all;
2 clc;
3 h=0.01;
4 N=1/h;
5 a=1;
6 b=0.2;
7 d=0.1;
8 beta=0.6;
9 alpha1=0;
10 alpha2=0.03;
11 gamma=0.05;
12
13 for i=1:N+1
14     alpaa1(i)=alpha1+(i-1)*h;
15     ro=beta/(b+d);
16     RO(i)=ro+(gamma*alpaa1(i))/(b+d);
17     S(i)=a/(b*RO(i));
18     I(i)=((a*(b+alpha2))/(b*(b+alpha2+d)))*(1-(1/RO(i)));
19     R(i)=((a*d)/(b*(b+alpha2+d)))*(1-(1/RO(i)));
20 end
21 figure(1)
22 plot(alpaa1,S,'b',alpaa1,I,'r',alpaa1,R,'g','LineWidth',3);
23 ;
24 axis square
25 xlabel('perpindahan individu antarwilayah');
26 ylabel('Jumlah Individu S,I dan R');
27 legend('Susceptible','Infected','Removed');
28 grid on
29 figure(2)
30 plot(alpaa1,RO,'r','LineWidth',3);
31 axis square
32 xlabel('tingkat perpindahan individu antarwilayah');
33 ylabel('Bilangan Reproduksi Dasar (Ro)');

```



```

34 legend ('Grafik bilangan reproduksi dasar');
35 grid on

```

Lampiran 3 Source code program eksistensi

eksistensi.m

```

1  clc;
2  clear all;
3
4  h=0.01;
5  N=1/h;
6  a=1;
7  b=0.2;
8  d=0.1;
9  alpa2=0.03;
10 gamma=0.01;
11 alpa1=0.02;
12 beta=0;
13
14 for i=1:N+1
15     betaa(i)=beta+(i-1)*h;
16     ro=betaa(i)/(b+d);
17     RO(i)=(ro+(gamma*alpa1)/(b+d));
18     I(i)=((a*(b+alpa2))/(b*(b+alpa2+d)))*(1-(1/RO(i)));
19     I3(i)=((a*(b+alpa2))/(b*(b+alpa2+d)))*(1-(1/RO(i)));
20
21     if I3(i)<0
22         I3(i)=0;
23     end
24 end
25
26 for i=1:N+1
27     I2(i)=0;
28 end
29
30 figure(1)
31 plot(RO,I,'g','Linewidth',3);
32 grid on; hold on;
33 plot(RO,I2,'r','Linewidth',3);
34 grid on; hold on
35 plot(RO,I3,'r','Linewidth',3);
36 axis([0 1.5 -0.5 1.5]);
37 xlabel('Ro');
38 ylabel('Infected (t)');
39 axis square
40 legend('E+ Tidak Eksis','E0 dan E+ Eksis');
41
42

```


Lampiran 4 *Source code* program Model II

	model_II.m
1	clear all;
2	clc;
3	
4	S10=1;
5	I10=2;
6	T10=0;
7	R10=1.5;
8	S20=3;
9	I20=1;
10	T20=0;
11	R20=0.5;
12	
13	a=1;
14	b=0.2;
15	d=0.1;
16	beta=0.6;
17	alpha1=0.02;
18	alpha2=0.03;
19	gamma=0.01;
20	umax=0.9;
21	A=1;
22	
23	a1=0;
24	a2=120;
25	M=500;
26	h=(a2-a1)/M;
27	t=a1:h:a2;
28	P=length(t);
29	
30	u =zeros(P,1);
31	uL =zeros(P,1);
32	S1 =zeros(P,1);
33	I1 =zeros(P,1);
34	T1 =zeros(P,1);
35	R1 =zeros(P,1);
36	S2 =zeros(P,1);
37	I2 =zeros(P,1);
38	T2 =zeros(P,1);
39	R2 =zeros(P,1);
40	S1L=zeros(P,1);
41	I1L=zeros(P,1);
42	T1L=zeros(P,1);
43	R1L=zeros(P,1);
44	S2L=zeros(P,1);
45	I2L=zeros(P,1);
46	T2L=zeros(P,1);
47	R2L=zeros(P,1);
48	lambdaS1=zeros(P,1);
49	lambdaI1=zeros(P,1);
50	lambdaT1=zeros(P,1);
51	lambdaR1=zeros(P,1);
52	lambdaS2=zeros(P,1);
53	lambdaI2=zeros(P,1);
54	lambdaT2=zeros(P,1);


```

55 lambdaR2=zeros(P,1);
56 lambdaS1L=zeros(P,1);
57 lambdaI1L=zeros(P,1);
58 lambdaT1L=zeros(P,1);
59 lambdaR1L=zeros(P,1);
60 lambdaS2L=zeros(P,1);
61 lambdaI2L=zeros(P,1);
62 lambdaT2L=zeros(P,1);
63 lambdaR2L=zeros(P,1);
64 cek=1;
65 it =0;
66 looping=0;
67 while (cek>1e-3)&&(looping<120)
68
69 uL =u;
70 S1L=S1;
71 I1L=I1;
72 T1L=T1;
73 R1L=R1;
74 S2L=S2;
75 I2L=I2;
76 T2L=T2;
77 R2L=R2;
78 lambdaS1L =lambdaS1;
79 lambdaI1L =lambdaI1;
80 lambdaT1L =lambdaT1;
81 lambdaR1L =lambdaR1;
82 lambdaS2L =lambdaS2;
83 lambdaI2L =lambdaI2;
84 lambdaT2L =lambdaT2;
85 lambdaR2L =lambdaR2;
86
87 S1(1)=S10;
88 I1(1)=I10;
89 T1(1)=T10;
90 R1(1)=R10;
91 S2(1)=S20;
92 I2(1)=I20;
93 T2(1)=T20;
94 R2(1)=R20;
95 J(it+1)=0;
96
97 for i=1:P-1
98     J(it+1)=J(it+1)+h*(I1(i)+I2(i)+ 1/2*A*uL(i)^2);
99
100     x =[S1(i) I1(i) T1(i) R1(i) S2(i) I2(i) T2(i) R2(i)];
101     k1=h*Fst(x,uL(i),a,b,d,beta,alpa1,alpa2,gamma);
102     k2=h*Fst(x+0.5*k1,uL(i),a,b,d,beta,alpa1,alpa2,gamma);
103     k3=h*Fst(x+0.5*k2,uL(i),a,b,d,beta,alpa1,alpa2,gamma);
104     k4=h*Fst(x+k3,uL(i),a,b,d,beta,alpa1,alpa2,gamma);
105     x=x+(1/6)*(k1+2*k2+2*k3+k4);
106
107     S1(i+1)=x(1);
108     I1(i+1)=x(2);
109     T1(i+1)=x(3);
110     R1(i+1)=x(4);
111     S2(i+1)=x(5);

```



```

112     I2(i+1)=x(6);
113     T2(i+1)=x(7);
114     R2(i+1)=x(8);
115 end
116 J(it+1)=J(it+1)+h*(I1(P)+I2(P)+1/2*A*uL(P)^2);
117
118 if it==0
119     figure(1)
120     plot(t,S1,'b-','LineWidth',3);
121     hold on;
122     plot(t,S2,'g-','LineWidth',3);
123     hold on
124
125     figure(2)
126     plot(t,I1,'b-','LineWidth',3);
127     hold on;
128     plot(t,I2,'g-','LineWidth',3);
129     hold on;
130
131     figure(3)
132     plot(t,T1,'b-','LineWidth',3);
133     hold on;
134     plot(t,T2,'g-','LineWidth',3);
135     hold on;
136
137     figure(4)
138     plot(t,R1,'b-','LineWidth',3);
139     hold on;
140     plot(t,R2,'g-','LineWidth',3);
141     hold on;
142 end
143
144 lambdaS1(P)=0;
145 lambdaI1(P)=0;
146 lambdaT1(P)=0;
147 lambdaR1(P)=0;
148 lambdaS2(P)=0;
149 lambdaI2(P)=0;
150 lambdaT2(P)=0;
151 lambdaR2(P)=0;
152 u(P) =0;
153
154 temp2 = min ([(lambdaI1(P)-
155 lambdaT1(P))*I1(P)+(lambdaI2(P)-lambdaT2(P))*I2(P)]/A
156 umax);
157 u(P) = max ([temp2 0]);
158
159 for i=1:P-1
160     j=P-i;
161
162     x=[lambdaS1(j+1) lambdaI1(j+1) lambdaT1(j+1)
163 lambdaR1(j+1) lambdaS2(j+1) lambdaI2(j+1) lambdaT2(j+1)
164 lambdaR2(j+1)];
165
166 k1=h*Fcs(x,S1(j+1),I1(j+1),T1(j+1),R1(j+1),S2(j+1),I2(j+1),
167 T2(j+1),R2(j+1),uL(j+1),b,d,beta,gamma,alpha1,alpha2);
168

```



```

169 k2=h*Fcs(x+0.5*k1,S1(j+1),I1(j+1),T1(j+1),R1(j+1),S2(j+1),I
170 2(j+1),T2(j+1),R2(j+1),uL(j+1),b,d,beta,gamma,alpa1,alpa2);
171
172 k3=h*Fcs(x+0.5*k2,S1(j+1),I1(j+1),T1(j+1),R1(j+1),S2(j+1),I
173 2(j+1),T2(j+1),R2(j+1),uL(j+1),b,d,beta,gamma,alpa1,alpa2);
174
175 k4=h*Fcs(x+k3,S1(j+1),I1(j+1),T1(j+1),R1(j+1),S2(j+1),I2(j+
176 1),T2(j+1),R2(j+1),uL(j+1),b,d,beta,gamma,alpa1,alpa2);
177 x=x-(1/6)*(k1+2*k2+2*k3+k4);
178
179 lambdaS1(j)=x(1);
180 lambdaI1(j)=x(2);
181 lambdaT1(j)=x(3);
182 lambdaR1(j)=x(4);
183 lambdaS2(j)=x(5);
184 lambdaI2(j)=x(6);
185 lambdaT2(j)=x(7);
186 lambdaR2(j)=x(8);
187
188 temp2 =min([(lambdaI1(j)-
189 lambdaT1(j))*I1(j)+(lambdaI2(j)-lambdaT2(j))*I2(j)]/A
190 umax]);
191 u(j) =max([temp2 0]);
192 end;
193
194 eS1 =sum(abs(S1-S1L));
195 eI1 =sum(abs(I1-I1L));
196 eT1 =sum(abs(T1-T1L));
197 eR1 =sum(abs(R1-R1L));
198 eS2 =sum(abs(S2-S2L));
199 eI2 =sum(abs(I2-I2L));
200 eT2 =sum(abs(T2-T2L));
201 eR2 =sum(abs(R2-R2L));
202
203 elambdaS1=sum(abs(lambdaS1-lambdaS1L));
204 elambdaI1=sum(abs(lambdaI1-lambdaI1L));
205 elambdaT1=sum(abs(lambdaT1-lambdaT1L));
206 elambdaR1=sum(abs(lambdaR1-lambdaR1L));
207 elambdaS2=sum(abs(lambdaS2-lambdaS2L));
208 elambdaI2=sum(abs(lambdaI2-lambdaI2L));
209 elambdaT2=sum(abs(lambdaT2-lambdaT2L));
210 elambdaR2=sum(abs(lambdaR2-lambdaR2L));
211 eu =sum(abs(u-uL));
212 cek
213 =eS1+eI1+eT1+eR1+eS2+eI2+eT2+eR2+elambdaS1+elambdaI1+elambd
214 aT1+elambdaR1+elambdaS2+elambdaI2+elambdaT2+elambdaR2+eu;
215 it= it+1;
216 u = ((0.5*u)+(0.5*uL));
217 looping=looping+1;
218 end;
219
220 figure (1)
221 plot(t,S1,'r-','LineWidth',3);
222 hold on
223 plot(t,S2,'m-','LineWidth',3);
224 xlabel('Waktu (hari)');
225 ylabel('Banyaknya Individu S(ratusan)');

```



```

226 grid on
227 legend('S1 tanpa kontrol','S2 tanpa kontrol','S1 dengan
228 kontrol','S2 dengan kontrol');
229 title('Populasi Susceptible');
230
231 figure (2)
232 plot(t,I1,'r-','LineWidth',3);
233 hold on
234 plot(t,I2,'m-','LineWidth',3);
235 xlabel('Waktu (hari)');
236 ylabel('Banyaknya Individu I(ratusan)');
237 grid on
238 legend('I1 tanpa kontrol','I2 tanpa kontrol','I1 dengan
239 kontrol','I2 dengan kontrol');
240 title('Populasi Infected');
241 hold on;
242
243 figure (3)
244 plot(t,T1,'r-','LineWidth',3);
245 hold on
246 plot(t,T2,'m-','LineWidth',3);
247 xlabel('Waktu (hari)');
248 ylabel('Banyaknya Individu T(ratusan)');
249 grid on
250 legend('T1 tanpa kontrol','T2 tanpa kontrol','T1 dengan
251 kontrol','T2 dengan kontrol');
252 title('Populasi Treatment');
253 hold on;
254
255 figure (4)
256 plot(t,R1,'r-','LineWidth',3);
257 hold on
258 plot(t,R2,'m-','LineWidth',3);
259 xlabel('Waktu (hari)');
260 ylabel('Banyaknya Individu R(ratusan)');
261 grid on
262 legend('R1 tanpa kontrol','R2 tanpa kontrol','R1 dengan
263 kontrol','R2 dengan kontrol');
264 title('Populasi Removed');
265 hold on;
266
267 figure (5)
268 plot(t,u,'r-','LineWidth',3);
269 xlabel('Waktu (hari)');
270 ylabel('u^(t)');
271 grid on
272 legend('kontrol pengobatan');
273 title('Kontrol Pengobatan');
274 hold on;
275

```


Function state

```

1 function dx=Fst(x,u,a,b,d,beta,alpa1,alpa2,gamma)
2
3 y(1)=a-b*x(1)-(beta*x(1)*x(2))/(x(1)+x(2)+x(3)+x(4))-
4 (gamma*alpa1*x(5)*x(6))/(x(5)+x(6)+x(7)+x(8))+alpa2*
5 x(4)-alpa1*x(1)+alpa1*x(5);
6 y(2)=(beta*x(1)*x(2))/(x(1)+x(2)+x(3)+x(4))+(gamma*alpa1*
7 x(5)*x(6))/(x(5)+x(6)+x(7)+x(8))-(b+u)*x(2)-
8 alpa1*x(2)+alpa1*x(6);
9 y(3)= u*x(2)-(b+d)*x(3)-alpa1*x(3)+alpa1*x(7);
10 y(4)= d*x(3)-(b+alpa2)*x(4)-alpa1*x(4)+alpa1*x(8);
11 y(5)=a-b*x(5)-(beta*x(5)*x(6))/(x(5)+x(6)+x(7)+x(8))-
12 (gamma*alpa1*x(1)*x(2))/(x(1)+x(2)+x(3)+x(4))+alpa2*
13 x(8)-alpa1*x(5)+alpa1*x(1);
14 y(6)=(beta*x(5)*x(6))/(x(5)+x(6)+x(7)+x(8))+(gamma*alpa1*
15 x(1)*x(2))/(x(1)+x(2)+x(3)+x(4))-(b+u)*x(6)-
16 alpa1*x(6)+alpa1*x(2);
17 y(7)= u*x(6)-(b+d)*x(7)-alpa1*x(7)+alpa1*x(3);
18 y(8)= d*x(7)-(b+alpa2)*x(8)-alpa1*x(8)+alpa1*x(4);
19
20 dx=[y(1) y(2) y(3) y(4) y(5) y(6) y(7) y(8)];

```

Function costate

```

1 function dlambdas=Fcs(x,S1,I1,T1,R1,S2,I2,T2,R2,
2 u,b,d,beta,gamma,alpa1,alpa2)
3
4 lambdaS1=x(1);
5 lambdaI1=x(2);
6 lambdaT1=x(3);
7 lambdaR1=x(4);
8 lambdaS2=x(5);
9 lambdaI2=x(6);
10 lambdaT2=x(7);
11 lambdaR2=x(8);
12
13 y(1)=(b*lambdaS1)+((lambdaS1-lambdaI1)*
14 (beta*I1*(I1+T1+R1))/(S1+I1+T1+R1)^2))+((lambdaS2-
15 lambdaI2)*((gamma*alpa1*I1*(I1+T1+R1))/(
16 (S1+I1+T1+R1)^2)))+(lambdaS1-lambdaS2)*alpa1;
17 y(2)=-1+((lambdaS1-lambdaI1)*
18 (beta*S1*(S1+T1+R1))/(S1+I1+T1+R1)^2))+((lambdaS2-
19 lambdaI2)*((gamma*alpa1*S1*(S1+T1+R1))/(
20 (S1+I1+T1+R1)^2)))+(lambdaI1-lambdaT1)*u)+
21 b*lambdaI1+(lambdaI1-lambdaI2)*alpa1;
22 y(3)=((lambdaI1-lambdaS1)*((beta*S1*I1)/(S1+I1+T1+R1)^2))
23 +((lambdaI2-lambdaS2)*((gamma*alpa1*S1*I1)/
24 (S1+I1+T1+R1)^2)))+(lambdaT1-lambdaR1)*d)+
25 b*lambdaT1+(lambdaT1-lambdaT2)*alpa1;
26 y(4)=((lambdaI1-lambdaS1)*((beta*S1*I1)/(S1+I1+T1+R1)^2))+
27 ((lambdaI2-lambdaS2)*((gamma*alpa1*S1*I1)/
28 (S1+I1+T1+R1)^2)))+(lambdaR1-lambdaS1)*alpa2)+
29 b*lambdaR1+(lambdaR1-lambdaR2)*alpa1;
30 y(5)=(b*lambdaS2)+((lambdaS2-lambdaI2)*

```



```

32      ((beta*I2*(I2+T2+R2))/(S2+I2+T2+R2)^2))+((lambdaS1-
33      lambdaI1)*((gamma*alpa1*I2*(I2+T2+R2))/
34      (S2+I2+T2+R2)^2))+((lambdaS2-lambdaS1)*alpa1;
35  y(6)=-1+((lambdaS2-lambdaI2)*((beta*S2*(S2+T2+R2))/
36      (S2+I2+T2+R2)^2))+((lambdaS1-lambdaI1)*
37      ((gamma*alpa1*S2*(S2+T2+R2))/(S2+I2+T2+R2)^2))+
38      ((lambdaI2-lambdaT2)*u)+b*lambdaI2+((lambdaI2-
39      lambdaI1)*alpa1;
40  y(7)=((lambdaI2-lambdaS2)*((beta*S2*I2)/(S2+I2+T2+R2)^2))+
41      ((lambdaI1-lambdaS1)*((gamma*alpa1*S2*I2)/
42      (S2+I2+T2+R2)^2))+((lambdaT2-lambdaR2)*d)+
43      b*lambdaT2+((lambdaT2-lambdaT1)*alpa1;
44  y(8)=((lambdaI2-lambdaS2)*((beta*S2*I2)/(S2+I2+T2+R2)^2))+
45      ((lambdaI1-lambdaS1)*((gamma*alpa1*S2*I2)/
46      (S2+I2+T2+R2)^2))+((lambdaR2-lambdaS2)*alpa2)+
47      b*lambdaR2+((lambdaR2-lambdaR1)*alpa1;
48
49  dlambd=[y(1) y(2) y(3) y(4) y(5) y(6) y(7) y(8)];
50

```